模块一习题

1　为什么 Erdős-Renyi 随机图不是好的社会网络模型?

在课上我们介绍了 Erdős-Renyi 模型。对于正整数 n 和 $p \in (0,1]$, Erdős-Renyi 模型是一个 n 个点的随机无向图 $G(n,p)$, 其中对于任何一对节点 $\{u,v\}$, 都独立地以概率 p 将 $\{u,v\}$ 加入边集。我们在课上证明了当 $p = \Omega\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ 时，大概率 $G(n,p)$ 中任何一对节点的距离是常数。这一定程度上反映了社会网络常见的“小世界”现象。

然而，我们也提到 Erdős-Renyi 并不是一个好的社会网络模型。考虑典型的强连通、有小世界性质时的 $p = \Theta\left(\frac{\ln n}{n}\right)$。**请尝试证明以下两个一般社会网络具备但是 Erdős-Renyi 不具备的性质。**

1. Erdős-Renyi 模型不具备三元闭包性质，特别地，求证聚集系数很低，是 $o(1)$ 的。回忆聚集系数的定义：对某个节点 u，设 N_u 是 u 的邻居的集合并且 $k_u = |N_u|$，则 u 的聚集系数是
$$\frac{|(v,w) \in E : v,w \in N_u|}{k_u(k_u-1)}$$
2. 求证 Erdős-Renyi 模型中节点的度的分布不是幂律。回忆幂律分布的定义是 x 出现的概率正比于 $1/x^\alpha$ $(\alpha > 0)$。这里为了方便可以假定 $\alpha = 2$。

2　幂律模型的小世界现象

课上我们介绍了如下的幂律模型：有 n 个点，按照 $i = 1, 2, \ldots, n$ 的顺序执行下面的随机过程：设当前节点是 i，以 p 的概率均匀随机选取一个 1 到 $i-1$ 的点 j 并将 i 连到 j，以剩下 $1-p$ 的概率均匀选取一个 1 到 $i-1$ 的点 j 并将 i 连到 j连接的点。这里 $p \in [0,1]$ 是一个参数。**求证**：对于任意两个节点，他们的最短路的长度的期望至多是 $O(p \ln n)$。提示：设 $f(i)$ 代表从 i 点出发到 i 之前点最远距离的期望。尝试写出 $f(i)$ 的递推式。

3　信息级联

考虑课堂上介绍的级联实验设置。令 $p = 1/2$，$q = 2/3$，用 b, r 表示信号，B, R 表示状态。（所以 $\Pr[B] = \Pr[R] = p$，$\Pr[b \mid B] = \Pr[r \mid R] = q$。）现在设想每个参与实验的人在基于已知信息算得状态概率为 0.5 的时候，以概率 $0 < c < 1$ 选择按照自己私有信号的指引对状态给出判断。**请回答下面两个问题。**

1. 论证当第 3 个人看到前面两人给出的判断为 (B, B) 时，无论她拿到的私有信号是什么，她都将给出判断 B（尽管知道第 2 个人可能拿的是 r 信号），从而级联形成。

2. 对于有 m 对 b 和 r 交替的信号序列（于是有 $2m$ 个信号），$b, r, b, r, \ldots, b, r$，给出在第 $2m+1$ 个信号上级联形成（即从第 $2m+1$ 个人开始完全放弃私有信号）的概率。并讨论其相对于不同 c 的合理性。