模块二习题

1　博弈基本概念

(a) 给出下面二人博弈的所有纯策略纳什均衡。

		Col	
		S	T
Row	S	3, 3	1, 2
	T	2, 1	3, 0

(b) 调整 Col 的收益，使得到的新博弈不再有纯策略纳什均衡。

(c) 求上一问得到的新博弈的混合策略纳什均衡。

(d) 在原始（调整 Col 收益前）的博弈中，是否可能通过调整 Row 的收益使得不存在纯策略纳什均衡？请证明自己的结论。

2　拥塞博弈

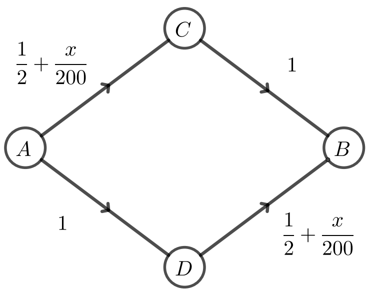

图 1

(a) 考虑图 1所示的交通网络。每条边上标记的是通行时间关于通行车辆数的函数。现有 100 辆车从 A 开到 B。求纳什均衡对应的流量模式和对应的社会成本（所有人的通行时间和）。

(b) 假设政府修了一条从 C 到 D 的单向高速路，并假设通行时间永远是 0。给出新网络的纳什均衡的流量模式和对应社会成本。

(c) 政府对修建 CD 高速路效果不满意，决定保持 CD 的同时向 AC 路段收费，并给与选择在 AD 路段行驶的车辆补贴。具体来说，对于 AC 路段，每辆车收费 0.125，同时对 AD

路段每辆车补贴 0.125。假设单位时间成本与单位费用等值。给出此时的纳什均衡对应的流量模式以及对应的社会成本。

3 次价拍卖

考虑一个二人参与的次价密封拍卖，并假设他们的估值区间 $[1, 3]$ 独立均匀分布。给出卖家的收入的数学期望。

4 匹配市场

设有 4 个人 x, y, z, w 对 4 样物品 A, B, C, D 分别有如下偏好

$$A >_x B >_x C >_x D, \quad A >_y C >_y D >_y B,$$
$$C >_z B >_z D >_z A, \quad C >_w D >_w B >_w A$$

(a) 根据偏好排序，构造一个估值矩阵（例如最喜欢的估值设为 4，最不喜欢的设为 1 等等)。

(b) 采用匹配市场的方式，给出一个最优分配和相应的“清仓价格”。

5 搜索广告位拍卖

第一题 考虑一个搜索广告位拍卖的场景。有 4 个广告位 (r_1, r_2, r_3, r_4), 点击率为 $r = (10, 7, 5, 2)$, 并有 5 个广告主 $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ 对它们感兴趣，点击估值为 $v = (8, 6, 3, 2, 1)$。

(a) 假设都按估值出价，分别给出广告位的 VCG 价格和 GSP 价格。

(b) 假设搜索引擎感到在 VCG 机制下，虽然广告主会按照估值出价，但算得的广告位价格并不高，于是它的收入不高。而采用 GSP 机制，广告主其实会倾向于让出价低于估值，从而它的收入也不高。这时，公司有两个员工出来提建议（假设他们都倾向于 VCG)。A 说既然广告主（5 个）多于广告位（4 个），说明需求大，我们应该创建一个新的广告位（假设点击率为 1，于是就有 $r = (10, 6, 5, 2, 1)$)，这样就能增加我们的收入。B 说不对，在现在这种情况下，减少一个广告位才可能增加收入（于是就有 $r = (10, 7, 5)$)。你的任务就是做一个分析（计算），看是应该增加一个广告位，还是减少一个广告位，或是保持现在的不变。

第二题 考虑某有 4 个广告位的搜索引擎。假设它把这 4 个广告位的经营权转让给另外两家公司（甲、乙），每家给 2 个广告位。公司甲的两个广告位的点击率分别为 10 和 6，它决定采用 GSP 的方式拍卖。公司乙的两个广告位的点击率为 8 和 4，它决定采用 VCG 的方式拍卖。现在有 4 个广告主 (x, y, z, w) 要来买广告位，他们的点击估值分别为 $9, 7, 5, 3$。假设每个广告主都知道搜索引擎方面的安排，但只能选择参与上述两种拍卖之一，提交出价，按相应规则最多得到一个广告位并支付相应价格。这个市场存在一个达到社会最优的出价均衡吗？如果存在，请给出一个均衡策略组合（若有多个，给出一个即可）且说明为什么是均衡。如果不存在，请给出证明。

6 中介市场

考虑一个交易网络，其中有两个买家 (B_1, B_2)，两个卖家 (S_1, S_2) 和两个中介 (T_1, T_2)。每个卖家有一件商品，底价为 0；每个买家对商品的估值为 1。卖家 S_1 和买家 B_1 只能和中介 T_1 交易；卖家 S_2 和买家 B_2 可以和任何中介交易。

(a) 画出该交易网络，中介是方块，买家和卖家是圆圈（卖家在左，买家在右），边表示可以直接交易的两方。将节点分别标注为 $T_1, T_2, B_1, B_2, S_1, S_2$。

(b) 考虑下列价格与商品流：T_1 对 S_1 的出价为 0，对 S_2 的出价为 $\frac{1}{2}$；对 B_1 的要价为 1，对 B_2 的要价是 $\frac{1}{2}$。T_2 对 S_2 的出价是 $\frac{1}{2}$，对 B_2 的要价是 $\frac{1}{2}$。一件商品从 S_1 经 T_1 流到 B_1，一件商品从 S_2 经 T_2 流到 B_2。这些价格与商品流描述了一个交易博弈的均衡吗？简要说明你的判断理由。

(c) 假设现在加入第三个中介 T_3，他只可以和 S_1, B_1 交易，网络的其他部分不变。考虑下列价格与商品流：在以前的边上的价格如(b)不变。在新的边上的价格是：T_3 对 S_1 的出价是 $\frac{1}{2}$，对 B_1 的要价是 $\frac{1}{2}$。商品流如(b)不变。这些价格与商品流描述了一个交易博弈的均衡吗？说明你的判断理由。

7 网络效应

考虑某产品具有正负两种网络效应的情形：在人数较少的情况下，较多人的使用，会使产品变得更有吸引力，但一旦使用人数超过一定规模，再增加则会降低其吸引力。例如某些会员制俱乐部，如果现有会员人数不是很多，人们倾向于考虑加入，但如果已经有太多的会员，其吸引力反而会降低。

现在我们考虑一个结合了这两种网络效应的模型。假设消费者以 0 到 1 的实数命名。个体 x 的保留价在没有考虑网络效应前为 $r(x) = 1 - x$。网络效应定义为 $f(z)$，其中当 $z < \frac{1}{4}$ 时 $f(z) = z$，当 $z \geq \frac{1}{4}$ 时 $f(z) = \frac{1}{2} - z$。这样，当占比为 $z = \frac{1}{4}$ 的人使用该产品时，一个用户从整个用户群中获益最大；当人数超过 $\frac{1}{4}$ 后，一个用户从网络效应中获得的利益随人数增多反而下降，进而当超过 $\frac{1}{2}$，获益将变成负的。现假设该产品的价格为 $p = \frac{1}{16}$。

(a) 这个市场存在几个用户规模的均衡？为什么？（你不一定要精确计算出具体人数；可以通过给定模型参数和图示进行解释）

(b) 哪些均衡是稳定均衡？为什么？

(c) 考虑非 0 的均衡（即其中有些人在使用产品）。在相应的用户规模下，社会福利是否最大？换句话说，如果有更多的用户使用产品，社会福利是否会上升？如果较少的人使用这个产品，社会福利是否会上升？请解释。（同样，不一定精确计算，只需要给出必要的解释）

8 网络级联

此题介绍另一种阈值模型。考虑有向无环图（DAG），每条边 (u, v) 上有一个 u 对 v 的影响力权重 $w_{u,v}$，且对每个节点 v 来说，它的入向边的权重之和不大于 1。进而每个节点有一个

随机（一旦产生则不变）的阈值 θ_v，在 $[0,1]$ 区间独立均匀分布。

级联过程 给定初始节点集合，一次性产生所有节点的随机阈值。在时间 $t \geq 1$，节点 v 被激活的条件是它的已被激活的入向邻居对它的影响力权重之和大于等于其阈值，表为

$$\sum_{u\text{ 为 }v\text{ 的入向邻居}} x_u^{(t-1)} \cdot w_{u,v} \geq \theta_v$$

这里 $x_u^{(t-1)}$ 代表节点 u 在 $t-1$ 时间的状态：$x_u^{(t-1)} = 1$ 表示 u 在 $t-1$ 时是激活的，否则 $x_u^{(t-1)} = 0$ 代表未激活。节点一旦被激活就会一直保持激活状态。

求证 令 $p(S,v)$ 表示 S 为种子节点集合时节点 v 被激活的概率。求证对于任何 DAG，对任何 $v \notin S$，有

$$p(S,v) = \sum_{u\text{ 为 }v\text{ 的入向邻居}} p(S,u) \cdot w_{u,v}$$