

模块二习题

1 博弈基本概念

(a) 给出下面二人博弈的所有纯策略纳什均衡。

		Col	
		S	T
Row	S	3, 3	1, 2
	T	2, 1	3, 0

(b) 调整 Col 的收益，使得到的新博弈不再有纯策略纳什均衡。

(c) 求上一问得到的新博弈的混合策略纳什均衡。

(d) 在原始（调整 Col 收益前）的博弈中，是否可能通过调整 Row 的收益使得不存在纯策略纳什均衡？请证明自己的结论。

2 拥塞博弈

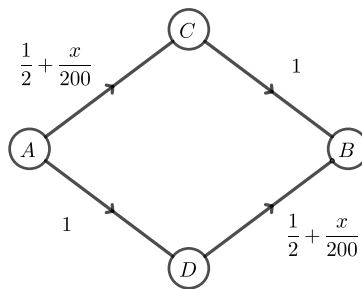


图 1

(a) 考虑图 1 所示的交通网络。每条边上标记的是通行时间关于通行车辆数的函数。现有 100 辆车从 A 开到 B。求纳什均衡对应的流量模式和对应的社会成本（所有人的通行时间和）。

(b) 假设政府修了一条从 C 到 D 的单向高速路，并假设通行时间永远是 0。给出新网络的纳什均衡的流量模式和对社会成本。

- (c) 政府对修建 CD 高速路效果不满意，决定保持 CD 的同时向 AC 路段收费，并给与选择在 AD 路段行驶的车辆补贴。具体来说，对于 AC 路段，每辆车收费 0.125，同时对 AD 路段每辆车补贴 0.125。假设单位时间成本与单位费用等值。给出此时的纳什均衡对应的流量模式以及对应的社会成本。

3 次价拍卖

考虑一个二人参与的次价密封拍卖，并假设他们的估值区间 $[1, 3]$ 独立均匀分布。给出卖家的收入的数学期望。

4 匹配市场

设有 4 个人 x, y, z, w 对 4 样物品 A, B, C, D 分别有如下偏好

$$A >_x B >_x C >_x D, \quad A >_y C >_y D >_y B, \\ C >_z B >_z D >_z A, \quad C >_w D >_w B >_w A$$

- (a) 根据偏好排序，构造一个估值矩阵（例如最喜欢的估值设为 4，最不喜欢的设为 1 等等）。
- (b) 采用匹配市场的方式，给出一个最优分配和相应的“清仓价格”。

5 搜索广告位拍卖

第一题 考虑一个搜索广告位拍卖的场景。有 4 个广告位 (r_1, r_2, r_3, r_4) ，点击率为 $r = (10, 7, 5, 2)$ ，并有 5 个广告主 $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ 对它们感兴趣，点击估值为 $v = (8, 6, 3, 2, 1)$ 。

- (a) 假设都按估值出价，分别给出广告位的 VCG 价格和 GSP 价格。
- (b) 假设搜索引擎感到在 VCG 机制下，虽然广告主会按照估值出价，但算得的广告位价格并不高，于是它的收入不高。而采用 GSP 机制，广告主其实会倾向于让出价低于估值，从而它的收入也不高。这时，公司有两个员工出来提建议（假设他们都倾向于 VCG）。A 说既然广告主（5 个）多于广告位（4 个），说明需求大，我们应该创建一个新的广告位（假设点击率为 1，于是就有 $r = (10, 7, 5, 2, 1)$ ），这样就能增加我们的收入。B 说不对，在现在这种情况下，减少一个广告位才可能增加收入（于是就有 $r = (10, 7, 5)$ ）。你的任务就是做一个分析（计算），看是应该增加一个广告位，还是减少一个广告位，或是保持现在的不变。

第二题 考虑某有 4 个广告位的搜索引擎。假设它把这 4 个广告位的经营权转让给另外两家公司（甲、乙），每家给 2 个广告位。公司甲的两个广告位的点击率分别为 10 和 6，它决定采用 GSP 的方式拍卖。公司乙的两个广告位的点击率为 8 和 4，它决定采用 VCG 的方式拍卖。现在有 4 个广告主 (x, y, z, w) 要来买广告位，他们的点击估值分别为 9, 7, 5, 3。假设每个广告主都知道搜索引擎方面的安排，但只能选择参与上述两种拍卖之一，提交出价，按相应规则最多得

到一个广告位并支付相应价格。这个市场存在一个达到社会最优的出价均衡吗？如果存在，请给出一个均衡策略组合（若有多个，给出一个即可）且说明为什么是均衡。如果不存在，请给出证明。

6 中介市场

考虑一个交易网络，其中有两个买家 (B_1, B_2)，两个卖家 (S_1, S_2) 和两个中介 (T_1, T_2)。每个卖家有一件商品，底价为 0；每个买家对商品的估值为 1。卖家 S_1 和买家 B_1 只能和中介 T_1 交易；卖家 S_2 和买家 B_2 可以和任何中介交易。

- 画出该交易网络，中介是方块，买家和卖家是圆圈（卖家在左，买家在右），边表示可以直接交易的两方。将节点分别标注为 $T_1, T_2, B_1, B_2, S_1, S_2$ 。
- 考虑下列价格与商品流： T_1 对 S_1 的出价为 0，对 S_2 的出价为 $\frac{1}{2}$ ；对 B_1 的要价为 1，对 B_2 的要价是 $\frac{1}{2}$ 。 T_2 对 S_2 的出价是 $\frac{1}{2}$ ，对 B_2 的要价是 $\frac{1}{2}$ 。一件商品从 S_1 经 T_1 流到 B_1 ，一件商品从 S_2 经 T_2 流到 B_2 。这些价格与商品流描述了一个交易博弈的均衡吗？简要说明你的判断理由。
- 假设现在加入第三个中介 T_3 ，他只可以和 S_1, B_1 交易，网络的其他部分不变。考虑下列价格与商品流：在以前的边上的价格如(b)不变。在新的边上的价格是： T_3 对 S_1 的出价是 $\frac{1}{2}$ ，对 B_1 的要价是 $\frac{1}{2}$ 。商品流如(b)不变。这些价格与商品流描述了一个交易博弈的均衡吗？说明你的判断理由。

7 网络效应

考虑某产品具有正负两种网络效应的情形：在人数较少的情况下，较多人的使用，会使产品变得更有吸引力，但一旦使用人数超过一定规模，再增加则会降低其吸引力。例如某些会员制俱乐部，如果现有会员人数不是很多，人们倾向于考虑加入，但如果已经有太多的会员，其吸引力反而会降低。

现在我们考虑一个结合了这两种网络效应的模型。假设消费者以 0 到 1 的实数命名。个体 x 的保留价在没有考虑网络效应前为 $r(x) = 1 - x$ 。网络效应定义为 $f(z)$ ，其中当 $z < \frac{1}{4}$ 时 $f(z) = z$ ，当 $z \geq \frac{1}{4}$ 时 $f(z) = \frac{1}{2} - z$ 。这样，当占比为 $z = \frac{1}{4}$ 的人使用该产品时，一个用户从整个用户群中获益最大；当人数超过 $\frac{1}{4}$ 后，一个用户从网络效应中获得的利益随人数增多反而下降，进而当超过 $\frac{1}{2}$ ，获益将变成负的。现假设该产品的价格为 $p = \frac{1}{16}$ 。

- 这个市场存在几个用户规模的均衡？为什么？（你不一定要精确计算出具体人数；可以通过给定模型参数和图示进行解释）
- 哪些均衡是稳定均衡？为什么？
- 考虑非 0 的均衡（即其中有些人在使用产品）。在相应的用户规模下，社会福利是否最大？换句话说，如果有更多的用户使用产品，社会福利是否会上升？如果较少的人使用这个产品，社会福利是否会上升？请解释。（同样，不一定精确计算，只需要给出必要的解释）