# 信息级联

姜少峰

北京大学前沿计算研究中心
Center on Frontiers of Computing Studies, Peking University

# 从众

- 去一个城市旅游，决定去餐馆A
- 到了却发现A没什么人，但是临近的餐馆B人爆满，此时很可能会去B

为何多数人的选择更有说服力？

为何忽略自己的信息而跟从大众？

# Milgram, Bickman, Berkowitz实验

The Street Corner Experiment

https://www.youtube.com/watch?v=fmPPN4ejGhg&t=33s

https://www.youtube.com/watch?v=o8BkzvP19v4

# 随大流现象是盲目的吗?

- 理性推断 vs 纯社会压力导致的顺从?
- Milgram, Bickman, Berkowitz 1969 做了一个实验:
  - 将参加者分成1-15人不等的小组
  - 分别让这些组的人站在街头注视天空，观察有多少路人跟着停下来注视
- 结果:
  - 只有1个人注视时，很少有人停下来
  - 5人时会多一些停下来，但是多数还是选择忽略
  - 当15人都注视天空时，多达45%的路人也跟着停了下来
- 说明:
  - 从众不是一贯、盲目的，会随着一致性群体活动而增强
  - 另一种解释就是信息级联：最初的路人没有理由看；后来的人得到的信息让他们觉得有充分的理由这么做

# 信息级联

- 信息级联 (information cascade) / 群集 (herding) [Banerjee, 1992; Bikhchandani, Hirshleifer, 1992; Welch, 1992]
  - n个人依次做决策
  - 每个人除了自己的有限信息，还可以看到前面人的决策
  - 但是结果：理性判断后决定忽略自己看到的信息而跟随人群做决策
- 可以一定程度上解释社会上的模仿现象
  - 时尚潮流；表决；畅销

# AH实验 (Anderson, Holt, 1996 & 1997)

- 有一个放有3个红/蓝小球的盒子：.5概率RRB，.5概率BBR

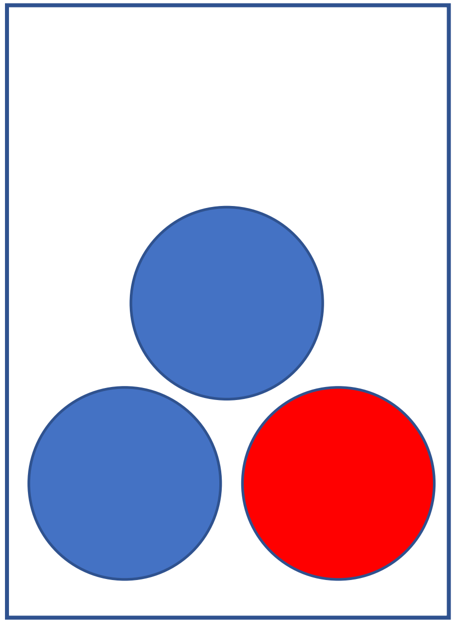

- RRB = R多，BBR=B多

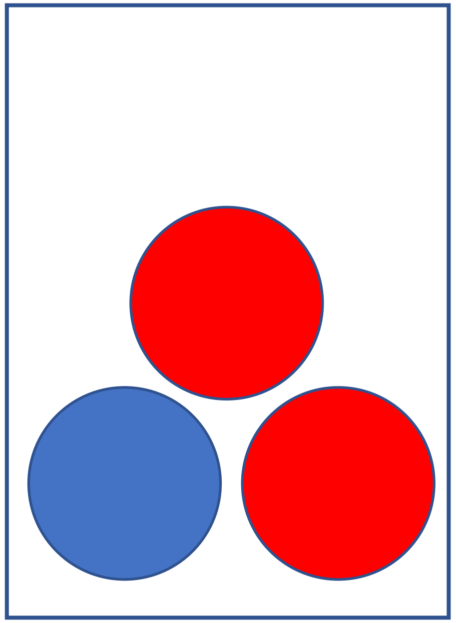
- n个人依次上前随机摸一个球并放回去
  - 仅能自己看到球的R/B
  - 公开宣布自己猜R多还是B多
  - 猜对有奖
- 没轮到的人看不到球，但是能听到、记住前面所有人的猜测

- 假设所有学生都根据所得到的信息理性做出决策
  - 包括前人和自己看到的
- 会发生什么结果?

# 非正式分析

- 第一个人
  - 看到什么颜色的球，就应该猜对应的颜色（为什么？）
- 结论：第一个人的猜测 = 球的颜色





# 第二个人?

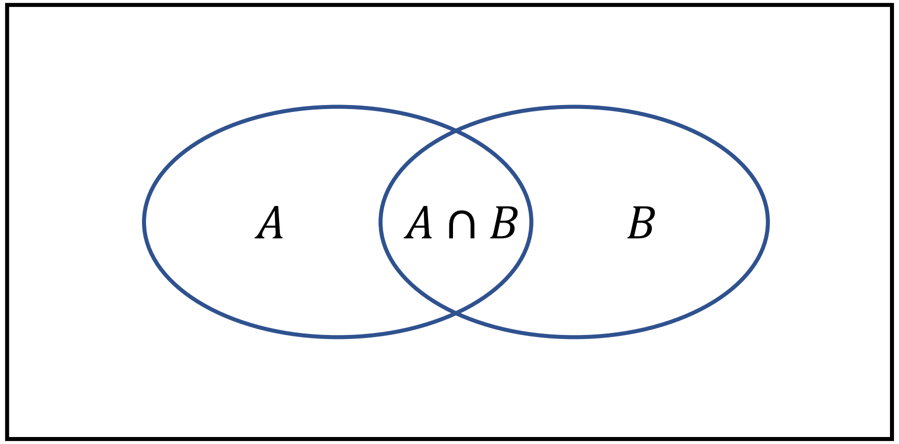
- 如果自己的球和第一个人猜的颜色一样?
  - 那么应该猜该颜色
- 如果自己的球和第一个人猜的颜色不同?
  - 相当于拿了两次球得到了不同的颜色
  - 此时第二个人只能随便猜（为什么？）
  - （假设猜自己看到的颜色）
- 结果：第二个人的猜测 = 球的颜色

# 后来的学生?

- 假设前两个学生的猜测是相同的，比如RR
- 第三个学生?
  - 第三个学生会忽略自己的球的颜色而猜R
- 第四个学生?
  - 继续丢掉自己的信息，继续猜R
- …
- 结论：只要前两人猜了相同的颜色，那么后面的人就该放弃自己的信息，而猜相同的颜色
- 产生了信息级联!
- （如果前两个不是RR或者BB呢？）

# 分析工具：条件概率

- 利用已有的观测信息定义一个事件发生的概率
- 观测：B，考察：A
- 已经看到B，如何影响A?




- 核心工具：条件概率

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

- 如何理解“已知B发生”？本质上是将基本事件空间变成了B
- 已知B发生，那么A发生只会在$A \cap B$区域，概率就是对B的占比

# 分析工具：贝叶斯法则

$$\Pr[A \mid B] = \Pr[A] \cdot \frac{\Pr[B \mid A]}{\Pr[B]}$$

- $\Pr[A]$叫做先验概率：不知道B是否发生，A发生的概率
- $\Pr[A \mid B]$叫做后验概率：知道B发生了，A再发生的概率
- 贝叶斯法则可看作是将先验转化成后验的公式

# 举例

- 有80%出租车黑色 (B)，20%黄色 (Y)
  - $\Pr[\text{true} = B] = 0.8, \Pr[\text{true} = Y] = 0.2$
- 有出租车肇事逃逸，目击者证词：
  - 如果真是黑车，以80%概率称看到黑车 $\Pr[\text{rep} = B \mid \text{true} = B] = 0.8$
  - 如果真是黄车，以80%概率称看到黄车 $\Pr[\text{rep} = Y \mid \text{true} = Y] = 0.8$
- 如果证词是黄车，那么真的是黄车的概率有多大?
- $\Pr[\text{true} = \mathrm{Y} \mid \text{rep} = Y] = \Pr[\text{true} = Y] \cdot \frac{\Pr[\text{rep}=Y \mid \text{true}=Y]}{\Pr[\text{rep}=Y]}$
- 只有$\Pr[\text{rep} = Y]$未知
  - $\Pr[\text{rep} = Y] = \Pr[\text{rep} = Y \mid \text{true} = Y] \cdot \Pr[\text{true} = Y] + \Pr[\text{rep} = Y \mid \text{true} = B] \cdot \Pr[\text{true} = B]$
- 证词是黑车，那么真是黑车的概率多大?

# 垃圾邮件过滤

- 如果标题出现了某个关键词X，这个新邮件是垃圾邮件概率多大?
- 根据历史统计:
  - 垃圾邮件/非垃圾邮件占比 $\Pr[\text{spam}], \Pr[\text{not spam}]$
  - 在垃圾邮件中和非垃圾邮件中X分别占比 $\Pr[X \mid \text{spam}], \Pr[X \mid \text{not spam}]$
- 利用贝叶斯法则计算$\Pr[\text{spam} \mid X]$

$$\Pr[\text{spam} \mid X] = \Pr[\text{spam}] \cdot \frac{\Pr[X \mid \text{spam}]}{\Pr[X]}$$

$$\Pr[X] = \Pr[X \mid \text{spam}] \cdot \Pr[\text{spam}] + \Pr[X \mid \text{not spam}] \cdot \Pr[\text{not spam}]$$

# AH实验的贝叶斯分析

- 每个人的决策是条件概率：听到前人的预测后，估计R多 vs B多概率
- 如果$\Pr[\,\text{R多} \mid \text{已知信息}\,] \ge 0.5$那么就猜R多，否则猜B多
- 已知：
  - $\Pr[\text{R多}] = \Pr[\text{B多}] = 0.5$
  - $\Pr[\,\text{R} \mid \text{R多}\,] = \Pr[\,\text{B} \mid \text{B多}\,] = \frac{2}{3}$
- 考虑第一个人，并且假设看到了B
- $\Pr[\,B\text{多} \mid \text{B}\,] = \frac{2}{3}$，所以猜B是合理的

- 第二个人?

# 第三个学生

- 假设前两人猜测B；注意这说明他们看到的确实是B
- 考虑第三个人拿到了R的情况，那么他总共已知三次试验结果BBR
- $\Pr[\,B多 \mid BBR\,] = \Pr[B多] \cdot \frac{\Pr\left[BBR \mid B多\right]}{\Pr[BBR]} = \frac{2}{3}$

- 这和之前的推断相符：应该拿B
- 此时之后的人和第三个人信息一致，发生了信息级联！

# 一个更一般的模型

- 状态
  - 人们需要就是否接受某个选项做决定
  - 世界随机进入两种状态之一：接受该选项是好的G，或者坏的B
  - 世界的状态（果）由不可观察的初始随机事件决定（因），因此该状态不能直接知道，但人们可通过观察对世界的状态（果）做推断
  - 假设人们都知道初始随机事件将世界设为G的概率是p——先验概率
- 对应之前的AH实验：
  - G和B对应多数蓝球和多数红球，并知道先验概率
  - 无法得知到底是哪种情况，但是可以通过之后的观察做推断

# 回报

- 回报
  - 拒绝这个选项，回报 = 0
  - 接受的话，如果确实是G，那么得到整数$v_g$的回报，否则得到负数$v_b$的回报
  - 假设没其他信息的情况下，接受和拒绝一个选项的预期是0
    - $pv_g + (1-p)v_b = 0$
    - 故在无其他信息的情况下接受与拒绝都没明显区别
- 回报设置成$pv_g + (1-p)v_b$的意义?
  - 一个人如果接受了选项，那么期望回报就是这个式子

# 信号

- 信号
  - 假设做出决策前，每个人都得到一个私有信号，提供一些判据
  - 有两种可能的信号：高信号H和低信号L
  - H提示接受是好主意 (G)，L提示接受不是好主意 (B)
  - 具体来说，设q > 0.5
    - 若接受选项的确是好主意 (G)，那么H应该更频繁出现，我们设$\Pr[H \mid G] = q$
    - 若接受选项的确不是好主意 (B)，则L应该更频繁，我们设$\Pr[L \mid B] = q$

| | B | G |
|---|---|---|
| L | q | 1-q |
| H | 1-q | q |

- 对应之前的AH实验：
  - G和B对应多数蓝球和多数红球，并知道先验概率
  - 私有信号H/L是每个人拿到的球的颜色，如果拿到蓝球那么就是H否则是L
  - $\Pr[\mathrm{H} \mid G] = \Pr[\text{看到蓝球} \mid \text{蓝多}] = q = \frac{2}{3}$

# 个体的决策模型

- 假设一个人得到了高信号H那么回报从$v_g \Pr[G] + v_b \Pr[B] = 0$变成了
$$v_g \Pr[\,G \mid H\,] + v_b \Pr[\,B \mid H\,] > 0$$
- 为何？根据贝叶斯法则
$$\Pr[\,G \mid H\,] = \Pr[G] \cdot \frac{\Pr[\,H \mid G\,]}{\Pr[H]} = \frac{pq}{\Pr[H \mid G] \Pr[G] + \Pr[H \mid B] \Pr[B]}$$
$$= \frac{pq}{pq + (1-p)(1-q)} > p$$
- 此时决定接受选项可以得到期望正收益（拒绝收益总等于 = 0）
- 问题：如果一个人得到了低信号呢？

| | B | G |
|---|---|---|
| L | q | 1-q |
| H | 1-q | q |

# 多重信号

- 现考虑得到了一系列独立的高低信号，设信号序列是S
  - 设有a个高信号H，b个低信号L
- 证明：
  - 若$a > b$则后验概率Pr[G | S]大于先验概率Pr[G]
  - 若$a < b$则后验概率Pr[G | S]小于先验概率Pr[G]
  - 若$a = b$则Pr[G | S] = Pr[G]
  - 也就是决策取决于“多数票”

| | B | G |
|---|---|---|
| L | q | 1-q |
| H | 1-q | q |

- $\Pr[\,G \mid S\,] = \Pr[G] \cdot \frac{\Pr[\,S \mid G\,]}{\Pr[S]}$
- $\Pr[S \mid G] = q^a(1-q)^b; \Pr[S] = pq^a(1-q)^b + (1-p)(1-q)^a q^b$
- $\Pr[\,G \mid S\,] = \frac{pq^a(1-q)^b}{pq^a(1-q)^b+(1-p)(1-q)^a q^b}$ v.s. p?

# 依次决策

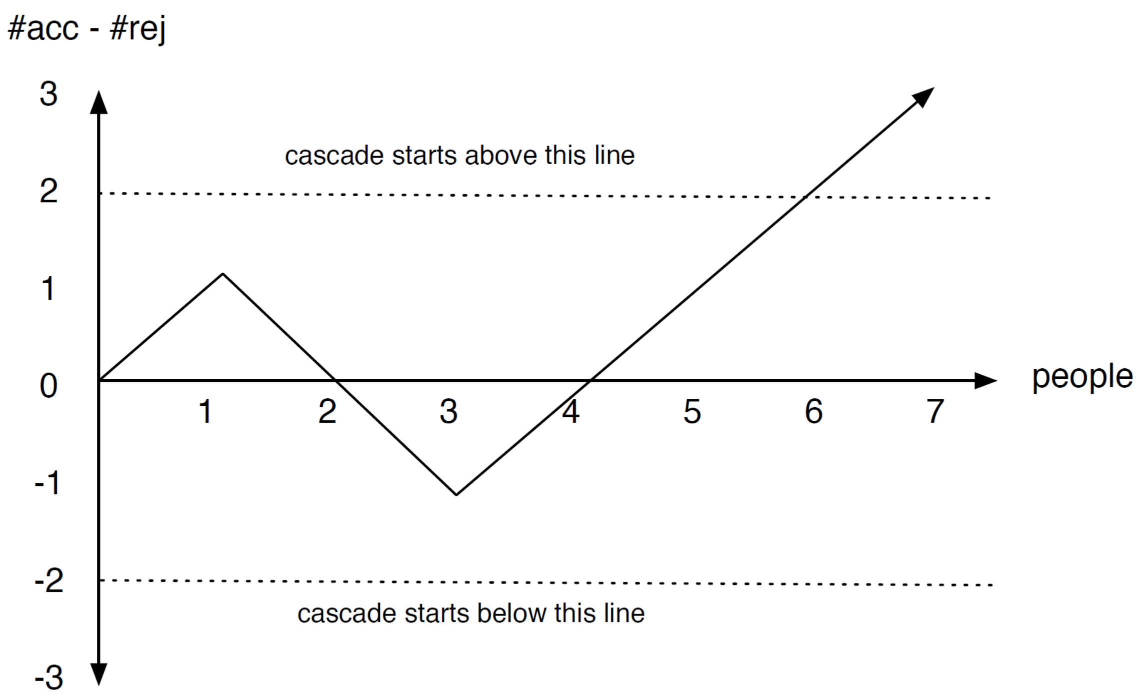
- 考虑多人的情况：每个人只能看到自己的私有信号以及前人的决定
- 上页结论：人们根据高低信号多数票进行决策

- P1的决策等于自己的信号 （都是0票）
- P2的决策也等于自己的信号 （自己信号对应信息不会是少数票）
- P3知道P1,P2的决策等于他们的信号，于是相当于得到了三个信号
  - 票数分析?
  - 如果P1 P2信号相同，那么P3需要放弃自己的信号，从此开始信息级联
  - 否则，P3的决策等于自己的信号

# P4及以后?

- 考虑现在是第N个人，并且假定前面所有人的决策 = 信号
- 如果前面决策接受数 = 拒绝数，那么N按照自己信号决策
- 如果 |接受数 - 拒绝数| = 1
  - 要么N的私有信号无用（差成为0）
  - 要么加强了差距（差成为2）
- 如果 |接受数 – 拒绝数| > 1
  - N的私有信号无法改变哪种情况占多数，从而忽略私有信号，增强差距
  - 之后的人都知道N忽略了自己的信号，从而面对同样的局面
  - 产生级联!

- 总结：
  - 如果 |接受数 – 拒绝数| <= 1，那么人们完全根据私有信号做决策
  - 否则级联开始！



# 级联发生的概率分析

- 长度是n的序列，发生级联的概率至少是?
  - 当连续三个相同信号产生时，一定会产生级联
    $\Pr[\text{不发生级联}] \le \Pr[\text{没有三个连续相同信号}]$
    $\le \Pr[\text{无}(3i+1, 3i+2, 3i+3)\text{型连续相同信号}] \le (1-\mathrm{q}^3-(1-\mathrm{q})^3)^{\frac{n}{3}}$

- 期望多少人决策后会发生级联?
  - 可以构造一个自动机来刻画这个序列
  - 相关问题：持续抛均匀硬币，第一次出现HT的期望次数?
  - 猴子打键盘？26个英文字母均匀随机键入，第一次出现某句话的期望次数?

# 关于级联的思考

- 可能导致完全错误的结果：
  - 接受选项可能不是好主意，但碰巧出现了两个高信号，大家全做了错误选择
- 理性的决策却是使用很少/biased的一点信息做出的
  - 一旦级联开始，后面有再多的人再多的信号也会被直接忽略
- 这种信息级联是脆弱的：
  - 级联容易启动也同样容易停止
  - 比如有人突然收到了2个甚至多个信号，或者有人公开了自己的私有信号

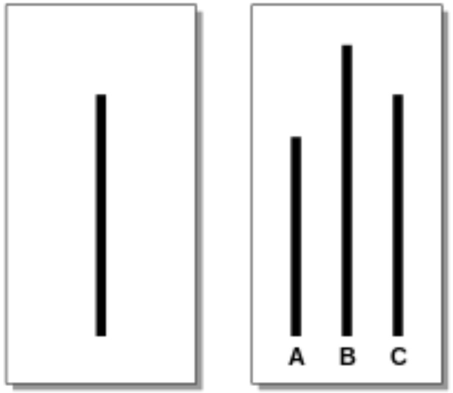
# 下面的实验可否用级联来解释？

Asch Line Test

Asch让7名被试在一张印有3条（A、B、C）线段的纸上找出与标准线段长度相同的，实验需要测试多组不同的被试，每组要做18个测试。在回答的过程中，7名被试按座位顺序逐一回答，但其实前6名被试都是实验助手，只有最后1名是真被试。

- 18次测试中，实验助手有12次故意出错，他们一起给出相同的错误答案。结果发现，真被试们的最终正确率为63.2%，而没有干扰单独测试的对照组正确率是99%。

https://www.youtube.com/watch?v=TYIh4MkcfJA



# 如何利用群体的智慧?

- James Surowiecki《群体的智慧》书中有一个不同于级联的例子:
  - 如果许多人都在独立猜测，总体上看人们的平均猜测结果与实际出乎意料的吻合（比如猜一头牛有多重，猜一袋100克豆子大概有多少粒）
  - 重点：利用私有信息，独立猜测
- 而如果每个人能看到别人的猜测，反而会形成级联产生偏差
  - 怎么用中心极限定理解释?

# 级联与专业评价

- 通常的规则：
  - 独立审稿
  - 招聘委员会成员独立发表意见和/或同时投票
- 否则后来人总会怀疑先发表意见的人有自己不知道的信息，于是形成级联

# 级联与营销

- 推新产品，若能让一开始的一批用户扎堆购买，那么就可以形成级联
- 重点：后来消费者看到了前面人的购买，但是看不到他们的信息
- 如何破除：
  - 如果有发表评价的系统，可以让前面人的信息也达到后来人那里

# 其他社会心理因素

- 社会利益
  - 朋友都在用微信，我也用，方便交流
- 潜在信息
  - 随大流可能带来好处；不参与则有可能带来坏处（宁可信其有）
  - 例如看人排队，我就去看看都在买什么；内卷?
- 社会压力
  - 不这么干“不合群”
  - 大家都同意某个观点、说法，我不同意会被排挤

我们讨论的信息级联属于哪个范畴?