幂律与富者愈富

姜少峰

北京大学前沿计算研究中心

Center on Frontiers of Computing Studies, Peking University

流行度

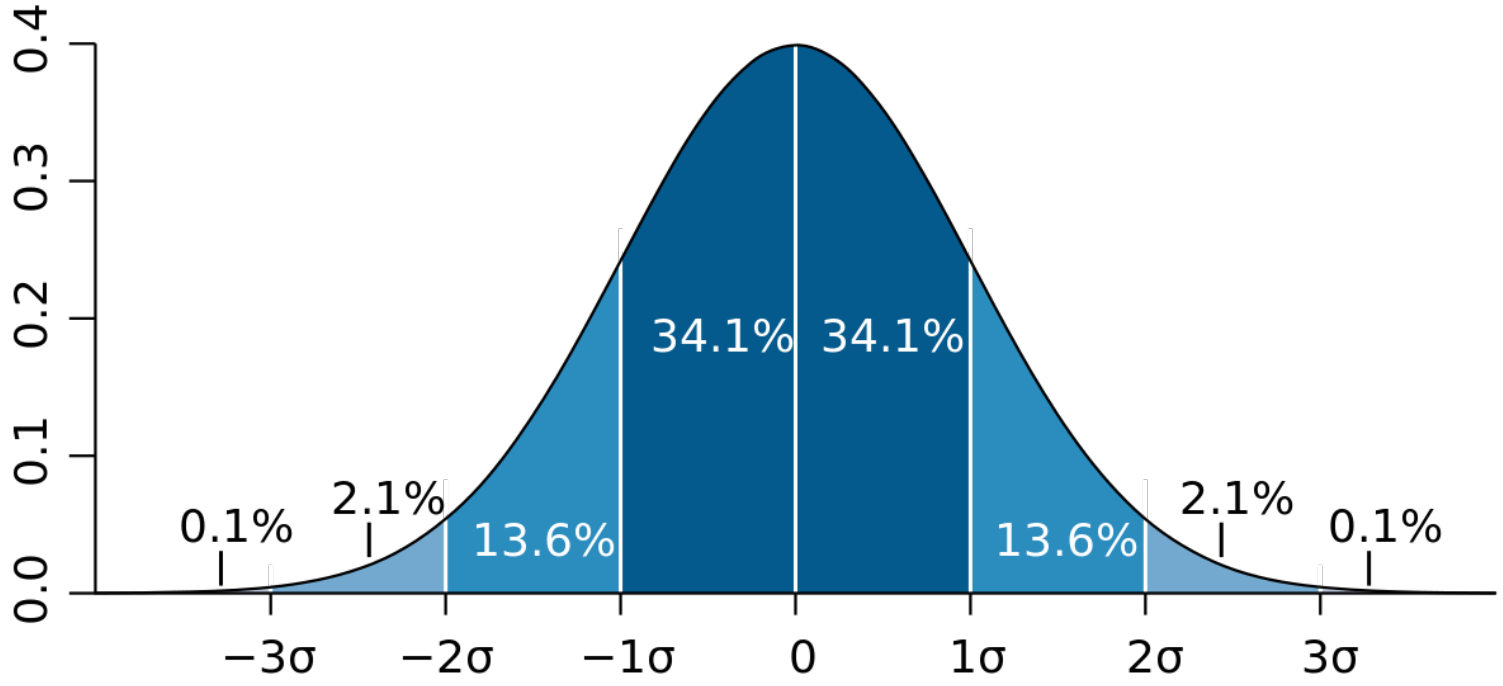
- 流行度一般是极端不平衡的
  - 多数人只是“普通人”，少数人有更广泛的知名度，极少数世界闻名
  - 艺术与科学亦如此（书籍、绘画、电影、研究成果等）
  - 任何有“观众”、“评价”的事物皆类似

定量研究知名度

- 通过完整互联网快照，算出Google Amazon等知名网站的链入链接数
  - 定义指向某个网页的所有链接为该网页的链入集合

- “整个互联网中有多少个网页有k个链入链接数？”
- “该链接数关于k的函数是怎样的？”

正态分布？



PDF： $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

如果是正态分布，那么每个网页应该会独立（同分布）随机决定要链接到哪个网页

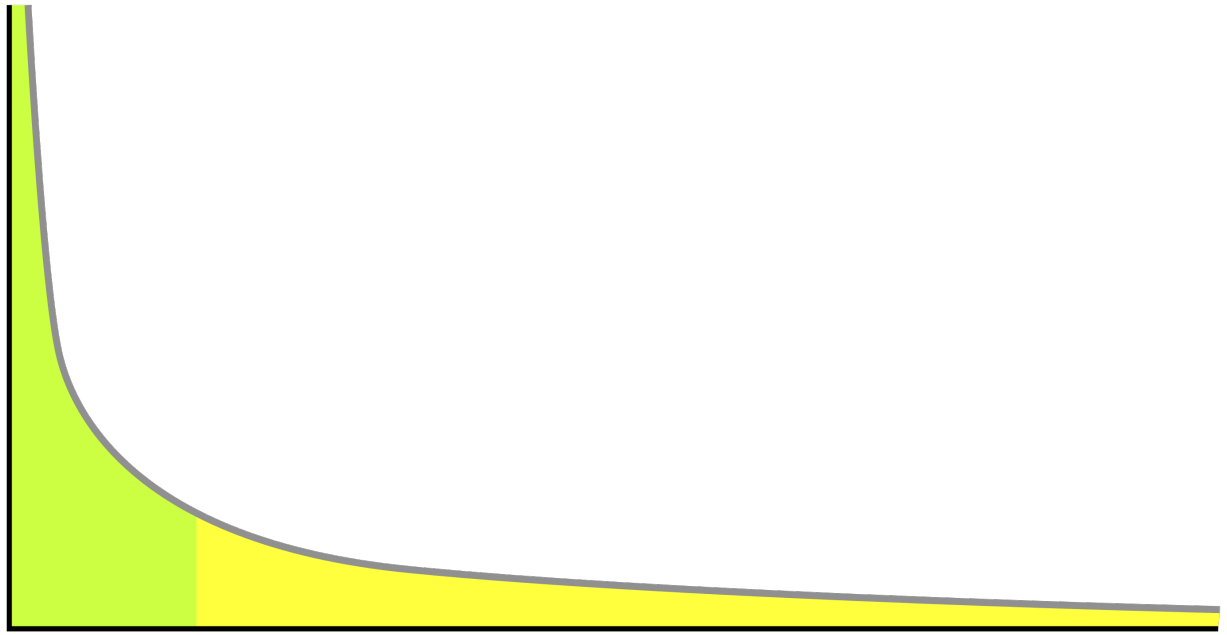
正态分布符合直观吗?

- 如果真是正态，那应当链入数增大时，概率指数下降

- 但显然没看到这种情况
  - 例如，高知名度的网站有很多
  - 知名度高的往往知名度不相上下
  - 同时也存在大量中等知名度的网站，尤其是各个细分领域的网站

幂律分布

- 在互联网数据上的分析发现，k个链入数的网页的比例与$\frac{1}{k^2}$成正比 (Broder et al., 2000)
- 和正态分布明显的不同：随着k的增大，概率密度降低明显更慢
- k非常大的时候，还是有相对显著的比例的网页有k个链入



幂律的性质

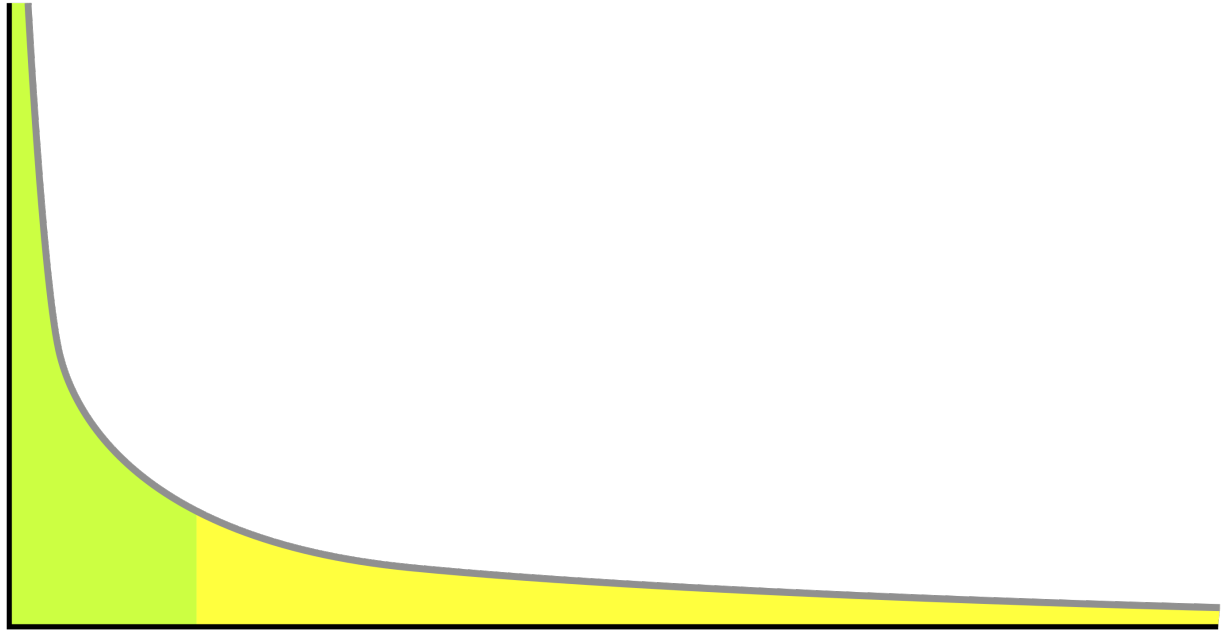
- 一般的幂律函数 $f(k) = ak^{-c}$ (c > 1) -- 如果$c \leq 1$呢?
- 标度不变性（scale invariant）-- 正态分布/函数有吗?
  - $f(\beta k) = a(\beta k)^{-c} = \beta^{-c} f(k) \propto f(k)$
- 当$c \leq 2$时不存在均值/数学期望
  - $\int x \cdot x^{-c}\, dx = \frac{1}{2-c} x^{2-c} + C$
- 当$c \leq 3$时不存在方差
- 无均值/方差说明普遍存在“无限可能”/“黑天鹅”事件
  - 中心极限定理不再适用，大独立样本的平均依然不稳定
  - 人群收入符合幂律：抽样估计人群收入均值，突然抽到了大老板，均值发散
- 然而，中值median总是存在的 -- 用中值当统计量更加robust

幂律广泛存在

- 8-2法则：80%的财富被20%的人所有；80%的销售额来自20%的客户
- Wiki的90-9-1定律：90%用户只看不写，9%改/更新，1%新增内容
- CPU的cache miss rate是size的幂律函数
- 收入分布
- 城市人口数

长尾现象

- 促销应选极为流行的项目，还是种类极多但是不那么流行的项目？
  - 前一种“畅销品”数量少收益高；后一种“利基”(niche) 吸引大量细分用户
- Chris Anderson (2004)认为，互联网的特点将媒体和娱乐业推向了“利基”战略：用大量非流行品的“长尾”来吸引大量用户从而盈利
  - 例子：Netflix，Amazon；推荐系统的重要性；仓储压力小

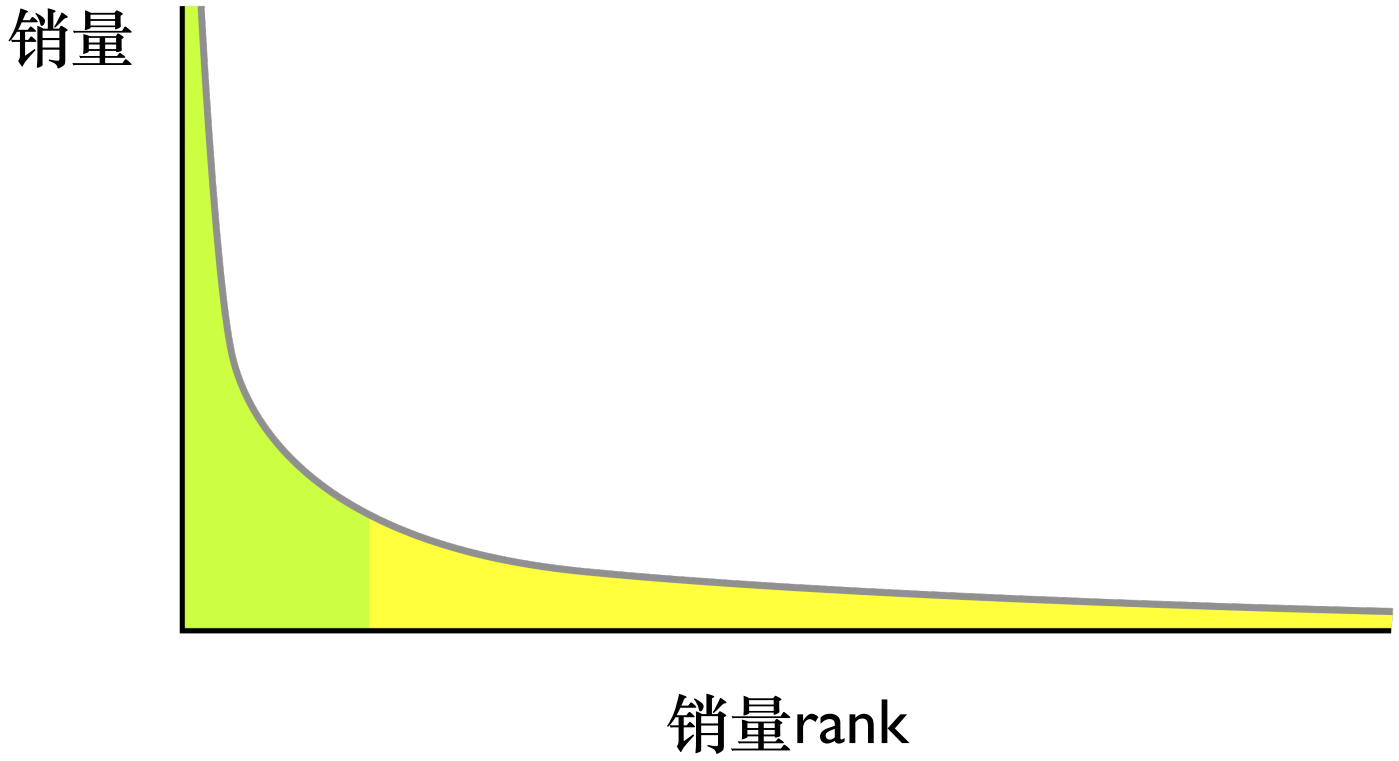


Rank-frequency plot

- 如何平衡“畅销” vs “利基”？
- 将商品类型按照销量（降序）排序，画出对应类型的销量

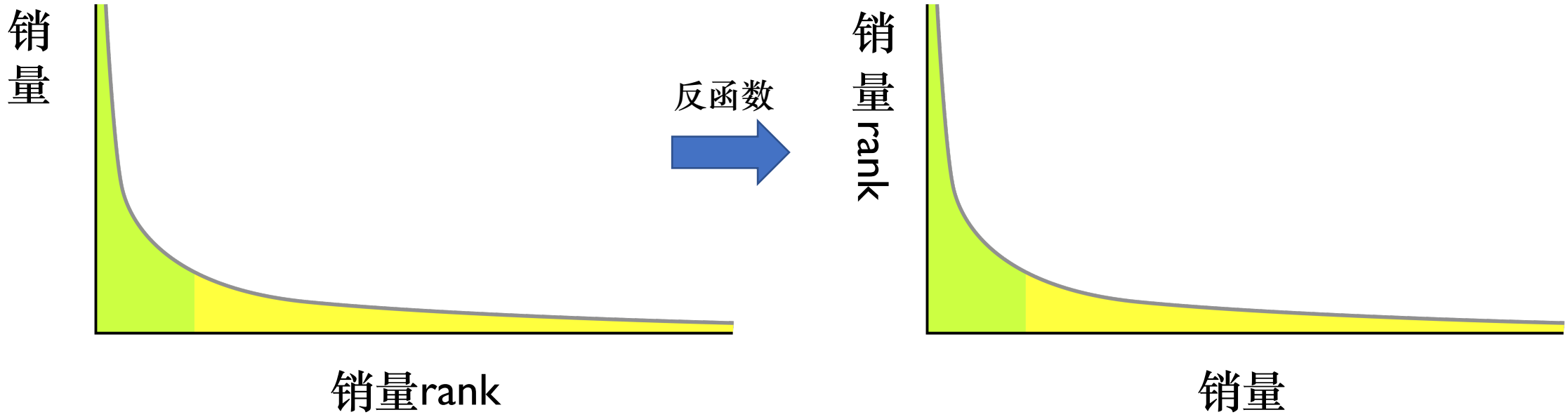
曲线下面积就是对应rank商品的销量

找出自己想要的分位点



商品排序-销量图的分布是什么

- 商品排序-销量图的分布是什么？考虑反函数：



- 反函数：作为k的函数，销量至少是k的商品有多少？

反函数服从什么分布?

- 已知：“作为k的函数，销量恰好为k的项目有数”符合幂律
- 我们需要：“作为k的函数，销量至少是k的商品有多少？”
- $f(k) = k^{-c}$ (c > 1)
- $g(k) = \int_{x=k}^{\infty} f(x)dx = \frac{x^{1-c}}{1-c}\Big|_{x=k}^{x=\infty} \propto k^{1-c}$
- 结论：g也符合幂律分布

Zipf plot

- Rank-frequency plot称为Zipf plot
- 源于语言学家George Zipf的研究：
  - /zɪf/, not /tsɪpf/ as in German
  - Latex发音?
  - 欧洲人的名字？Jiri Matousek, Artur Czumaj, Christian Sohler?
  - 相信中译
- Zipf's law: 在英文中，第j常用的单词出现频率与 1/ j 成正比
- 另一个相关的Zipf的发现：词长与词频成负相关

实证研究：如何检测是否服从幂律

- 找到f(k)代表某个总体中，值为k的那部分所占比例
- 希望验证$f(k) = ak^{-c}$
- 取对数：$\log f(k) = \log a - c \log k$

- 如果符合幂律，那么$\log k$为变量，$\log f(k)$为值的函数是线性的
  - 斜率是-c，截距是log a
- 思考：如果是正态分布呢？会看到什么？

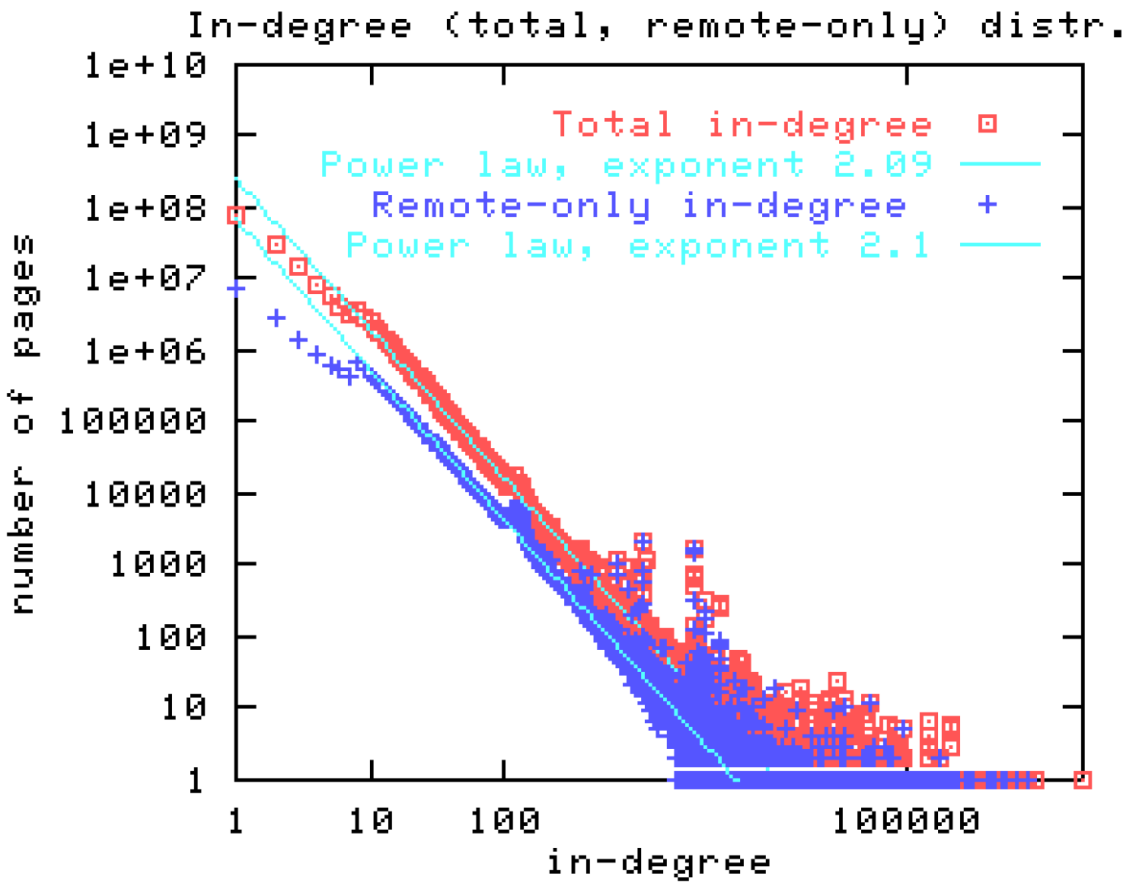


Figure 18.2: A power law distribution (such as this one for the number of Web page in-links, from Broder et al. [80]) shows up as a straight line on a log-log plot.

幂律存在的内部机制?

- 我们知道中心极限定理是独立同分布多次平均的结果
- 幂律：体现一个群体相互关联的决定形成的反馈

- 我们考虑一种“总体”模型：忽略个体决策细节，看宏观的行为

Barabási-Albert富者愈富模型

(Barabási and Albert 1999; Kumar et al., 2000)

1. 网页按照顺序被创建，标为1， 2, …, N
2. 网页j创建时，按以下方法随机产生链接（p为[0, 1]之间的一个数）
   a) 以概率p，j均匀随机地从已创建网页中选一个i，创建指向i的链接
   b) 以概率1 – p，j均匀随机地从已创建网页中选一个i，创建指向i指向的网页的链接

（潜在地，每个网页j可以重复第2步独立建立多次链接）

- 可以证明符合幂律，幂律指数与p的选取有关 (Bollobás 2003)
  - p越小，复制越频繁，c相应减小，从而流行网页更可见

直观解释

b) 以概率1 – p，j均匀随机地从已创建网页中选一个i，创建指向i指向的网页的链接

- 这一步履行“富者愈富”原则：
  - 最终链接到某个网页的概率与该网页当前入度成正比

b’) 以概率1 – p，j根据当前链入数成正比的概率选择一个网页并创建链接

- 这种连到流行度高的网页的方式又叫“择优连接”
- 择优连接的后果是概率较大的网页的链入数会加速增长
  - 而较小的还是会维持较小：他们的微小变化趋势会成为noise被抵消

问题：如果只有2.a而没有2.b呢（p = 1）？

“富者”的不可预测性

- 早期的随机连接可能会对后来谁成为“富者”产生巨大影响
  - 初始大家“富有”程度是一样的，谁更“富有”是完全随机的
  - 通常“富者”运气成分很多；有很多类似/更好的人/产品却完全销声匿迹
- 一个实证研究 (Salganik, Dodds, Watts, 2006)：
  - 创造一个音乐下载网站，提供48首冷门歌曲
  - 歌曲创作质量有明显不同，全都由真实乐队演唱
  - 用户可以下载歌曲，同时每首歌会显示累计下载次数
  - 幕后：8个网站的copy同时运行，初态完全一致
- 结果：
  - 允许看下载次数时，不同网站相同歌曲流行度差别大
  - 不允许看下载次数时，不同网站歌曲流行度差别明显变小

与信息级联的对比

- 相似点：早期一些随机扰动对结果会产生显著影响
- 不同：
  - 流行度模型包含的可能性大大多于级联（通常只有YES NO）
  - 复制模型更加“local”，只能看到看到随机选择的其他一个网页的决定而已
  - 复制模型更加“非理性”：后人只是模仿先人的处理做出决定

幂律模型的分析证明

考虑等价版本（替换2.b）

1. 网页按照顺序被创建，标为1， 2, …, N
2. 网页j创建时，按以下方法随机产生链接（p为[0, 1]之间的一个数）
   a) 以概率p，j均匀随机地从已创建网页中选一个i，创建指向i的链接
   b) 以概率1 – p，j根据当前链入数成正比的概率选择一个网页并创建链接

- 终极目标：对于每个k，具有k个链入边的网页的个数的期望

模型的确定性近似

- 考虑简化版本：近似成确定性过程，但仍能证明幂律分布特征
- 设随机变量$X_j(t)$代表t时刻j的入边数；显然需要$t \geq j$
- 考察某个t + 1时刻，连到j的概率是多少?

- 以p的概率随机连，所以这部分概率是$\frac{p}{t}$
- 以q = 1 − p的概率以正比于已经连的边的条数连接
  - 此时，总连接边是t，与j连接的是$X_j(t)$，所以这部分概率是$\frac{qX_j(t)}{t}$
- 所以t + 1时刻连到j的概率总共是：

$$\frac{p}{t} + \frac{qX_j(t)}{t}$$

离散随机过程的连续确定近似

- 将这个离散事件随机过程看作连续时间上的
  - 好处：一些细微概率变化被忽略，只关注主要变化量
  - 用微分方程来刻画随机过程，随机性被建模在了微分方程里 -> 确定性过程
- 设函数$x_j(t)$代表t时刻j网页的连入数$X_j(t)$的连续近似
- 根据刚刚的分析，t + l轮连到j的概率增量是：

$$\frac{p}{t} + \frac{qX_j(t)}{t}$$

- 那么将这个考虑成连续时间上的变化，就是

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{p}{t} + \frac{qx_j}{t}$$

解微分方程

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{p + qx_j}{t}$$

$$\frac{dx_j}{p + qx_j} = \frac{dt}{t}$$

- 两边积分：

$$\ln(p + qx_j) = q \ln t + C$$

$$p + qx_j = A \cdot t^q$$

$$x_j(t) = \frac{1}{q}(At^q - p)$$

解微分方程

$$x_j(t) = \frac{1}{q}(At^q - p)$$

- 由初始条件$x_j(j) = 0$，可得$A = \frac{p}{j^q}$，代入可得

$$x_j(t) = \frac{1}{q}\left(\frac{p}{j^q} \cdot t^q - p\right) = \frac{p}{q}\left(\left(\frac{t}{j}\right)^q - 1\right)$$

- 此时我们有了对每个时刻t，j的链入数

$$x_j(t) = \frac{1}{q}\left(\frac{p}{j^q} \cdot t^q - p\right) = \frac{p}{q}\left(\left(\frac{t}{j}\right)^q - 1\right)$$

- 我们要f(k)：对每个链入数k，时间t，有多少比例的j的链入数恰好是k
- 中间步骤F(k)：对每个链入数k时间t，有多少比例的j的链入数至少是k
- 也就是问有多少j，使得$x_j(t) \geq k$?

$$x_j(t) \geq k$$

$$x_j(t) = \frac{p}{q}\left(\left(\frac{t}{j}\right)^q - 1\right) \geq k$$

$$j \leq t \cdot \left(\frac{qk}{p} + 1\right)^{-\frac{1}{q}}$$

- 这样的j在t时刻所占比例：

$$F(k) = \left(\frac{q}{p} \cdot k + 1\right)^{-\frac{1}{q}}$$

- F(k)：对每个链入数k时间t，有多少比例的j的链入数至少是k
- $F(k) = \left(\frac{q}{p} \cdot k + 1\right)^{-\frac{1}{q}}$
- f(k)应该对应于F(k) – F(k+1)
- 但是我们进一步用连续近似，对F(k)求导数后取负：
- $f(k) = -F'(k) = -\frac{q}{p}\left(-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{p}{q} \cdot k + 1\right)^{-1-\frac{1}{q}} = \frac{1}{p}\left(\frac{p}{q} \cdot k + 1\right)^{-1-\frac{1}{q}}$
- 所以对应于power law的指数$1 + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{1-p}$

计算问题： heavy hitter

heavy hitter

- n个整数$a_1, \ldots, a_n$，输出至少出现了αn次的整数 $(0 < \alpha < 1)$
  - 利用哈希表可以做到O(n)时间和空间
- 假设n个整数以巨大的数据流给出，如何能以o(n)的空间求heavy hitter?
  - 只单向扫数据流一遍，不能回退
- 场景：
  - 大规模数据挖掘，数据在外部存储而不在主存上（而且也存不下）
  - 只关心heavy hitter，其他的不想存
  - “小”设备计算资源极端有限（路由器统计top访问ip来做流量监测）

- 观察：出现大于αn次的整数至多只有$1/\alpha$个
  - 能不能用这个空间来做?

基于采样的heavy hitter算法

- 设$\mathrm{m} = \alpha n, L \approx \log\frac{n}{m}$是一个待定参数

1. 每来一个元素a_i，以$\frac{L}{m}$的概率留下a_i，否则丢弃
2. 如果a_i留下了，把a_i插入哈希表
3. 如果a_i没留下，但是a_i在哈希表里，将a_i的counter + 1
4. 最后，将counter至少是$\frac{m}{2}$的留下，输出

- $\mathbb{E}[\text{size of hash table}] = \frac{Ln}{m}$
- Correctness：返回的都出现了至少$\frac{m}{2}$次，出现了m次的一定都返回了

Chernoff bound (Chernoff, 1952)

设$X_1, \ldots, X_n$是独立的$[0,1]$上的随机变量。令$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$\mu = E[X]$。那么

$$\forall t \in (0,1) \quad \Pr[|X - \mu| \geq t\,\mu] \leq 2\exp(-t^2\mu/3)$$

$$\forall t > 0 \quad \Pr[|X - \mu| \geq t\mu] \leq 2\exp(-t^2\mu/(2+t))$$

- $\mathbb{E}[\text{size of hash table}] = \frac{Ln}{m}$，Chernoff bound可以推出high prob bound
- Correctness：返回的都出现了至少$\frac{m}{2}$次，出现了m次的一定都返回了
- L最后该怎么选？

- 设$\mathrm{m} = \alpha n, L \approx \log\frac{n}{m}$是一个待定参数

1. 每来一个元素a_i，以$\frac{L}{m}$的概率留下a_i，否则丢弃
2. 如果a_i留下了，把a_i插入哈希表
3. 如果a_i没留下，但是a_i在哈希表里，将a_i的counter + 1
4. 最后，将counter至少是$\frac{m}{2}$的留下，输出

- 如果不知道n，只知道α呢？问题：不知道m。（但是假定知道L）
- 算法改成： a_i留下的概率改成$\frac{L}{\alpha i}$ 其他分析?

随机hash方法：CountMin Sketch

For integer m, k, function h: [m] -> [k] is called universal hash if

$$\forall x \neq y \in [m], \qquad \Pr[h(x) = h(y)] \leq \frac{1}{k}$$

这里[n] = {1, 2, …, n}

换句话说，就是collision的概率是值域大小分之一

CountMin Sketch (Cormode, Muthukrishnan, 2004)

1. 初始化一个长度为w的计数数组A，$w = \lceil 2/\alpha \rceil$
2. 构造一个universal hash function h : [m] -> [w]
3. 对于a_i，更新$A[h(a_i)] = A[h(a_i)] + 1$

保证

CountMin Sketch (Cormode, Muthukrishnan, 2004)

1. 初始化一个长度为w的计数数组A，$w = [2/\alpha]$
2. 构造一个universal hash function h : [m] -> [w]
3. 对于a_i，更新$A[h(a_i)] = A[h(a_i)] + 1$

- 以至少1/2概率，对于所有元素e，我们有

$$f_e \leq A[h(e)] \leq f_e + \alpha n$$

- 我们对于每个频数有αn相加误差的估计 – point count

分析

- 设每个元素e的frequency是f_e
- 对于每个元素e，以至少1/2概率，我们有

$$f_e \le A[h(e)] \le f_e + \alpha n$$

Markov's inequality (Markov or Chebyshev, ~18XX)
设X是非负随机变量。那么

$$\forall t > 0 \qquad \Pr[X \ge t] \le \frac{E[X]}{t}$$

- 首先，$f_e \le A[h(e)]$是显然的，因为h是将大域映射到小域的哈希
- $\mathbb{E}\left[A[h(e)]\right] - f_e = \sum_{d \ne e} f_d \cdot \Pr[h(d) = h(e)] \le \frac{n}{w} \le \frac{\alpha}{2} \cdot n$

$w = \lceil 2/\alpha \rceil$

- 由Markov's inequality：$\Pr[A[h(e)] \ge f_e + \alpha \cdot n] \le \frac{1}{2}$

Probability amplification

- 如何把0.5概率变成高概率保证

1. 独立运行t个独立的算法实例，
2. 对于每个查询e, 返回 $\min_{i=1,\ldots,t} A_i[h_i(e)]$

- 因为$\Pr[A[h(e)] \geq f_e + \alpha \cdot n] \leq \frac{1}{2}$
- $\Pr\left[\min_{i=1,\ldots,t} A_i[h_i(e)] > f_e + \alpha \cdot n\right] = \prod_{i=1}^{t} \Pr[A_i[h_i(e)] > f_e + \alpha n] \leq \frac{1}{2^t}$

一般的amplification方法

- 刚刚可以取min是因为从来不会低估
- 那么如果可能低估呢?
- 例如算法A以2/3概率可以输出一个在$[f_e, f_e + \alpha n]$的解
- 如何通过类似的amplification来把概率变成任意高?
- median trick： run A independently t time, and report the median value
- 分析:
  - 用Chernoff bound证明小于f_e以及大于$f_e + \alpha n$的输出的个数高概率在$\frac{t}{3}$附近
  - 所以排$\frac{t}{2}$的结果高概率在$[f_e, f_e + \alpha n]$

总结

- 以至少1/2概率，对于所有元素e，我们有

$$f_e \leq A[h(e)] \leq f_e + \alpha n$$

- 我们对于每个频数有αn相加误差的估计 – point count

- 如何求解heavy hitter?
  - 设已知一共有N个元素会被插入
  - 维护一个误差ϵ的CountMin sketch
  - 每个数据点被插入时，直接用CountMin来估计这个点重复了多少次
  - 如果回答次数≥ αN则算作heavy hitter
  - 最后的保证：所有出现≥ αN次的都返回了，其他返回的出现次数≥ $\alpha N - \epsilon N$
  - 思考：如果不预先知道N呢?

扩展：inner product

- 输入两列数A和B，元素都来自于某个域$[m]$
- 考虑他们的frequency vector，求frequency vector的inner product

- 算法：
- 用同一组hash h分别维护A和B的CountMin，并设count数组是C_A, C_B
- 最后直接返回C_A和C_B的inner product，即$\sum_x C_A[x]C_B[x]$
- 误差分析？Additive error $\alpha \cdot |A|_1|B|_1$

应用：预测Join操作结果集大小

- 考虑下面根据学号求Join

学号	参与社团
1	A
1	B
2	A

学号	修课	成绩
1	X	100
1	Y	95
2	X	90
2	Y	80

学号	参与社团	修课	成绩
1	A	X	100
1	A	X	100
1	B	Y	95
1	B	Y	95
2	A	X	90
2	A	Y	80

- 结果集大小：根据学号求frequency vector $a = (2, 1)$， $b = (2, 2)$
- Join大小$\langle a, b \rangle = 6$

- CountMin sketch是可合并的、支持删除的
  - 用同一套universal hash，分别计算两个输入序列X、Y上的CountMin sketch
  - 最后可以把维护的A数组逐项求和叠加得到整个$X \cup Y$数据集的CountMin
  - 同样的，逐项相减可以得到从X删除Y后的数据集

如何构造universal hashing

For integer m, k, function h: [m] -> [k] is called universal hash if

$$\forall x \neq y \in [m], \qquad \Pr[h(x) = h(y)] \leq \frac{1}{k}$$

算法：

1. 不失一般性，设k为素数（即把m替换成最小素数$k' \geq k$）
2. 设$s = \lceil \log_k m \rceil$，取s个独立的$\{0, \dots, k-1\}$上的均匀随机数$\{a_i\}_i$
3. 给定$x \in [m]$，把x表示成k-进制数，定义$h(x) := \sum_i a_i x_i \bmod k$

分析：若$x \neq y$则存在$1 \leq i \leq s$使得$x_i \neq y_i$，则

$$\Pr[h(x) = h(y)] = \Pr[a_i \equiv -(x_i - y_i)^{-1} \sum_{j \neq i} a_j (x_j - y_j) \bmod k] = \frac{1}{k}$$

k是素数，$x_i - y_i \neq 0 \bmod k$，因此必有惟一的逆

结论：只需要用$s = \lceil \log_k m \rceil$个随机位即可