拍卖

姜少峰

北京大学前沿计算研究中心
Center on Frontiers of Computing Studies, Peking University

单件艺术品拍卖金额世界记录

Salvator Mundi

'Savior of the World'

by Leonardo da Vinci (?)

https://www.youtube.com/watch?v=3orkmMISpml
https://www.youtube.com/watch?v=j0IXLGgQjYY

拍卖（auction）的类型

- 增价拍卖
  - 又称“英式拍卖”
  - 卖方逐渐提高售价，竞拍者不断退出，直到只剩一位买家
  - 该买家以最终价赢得商品
- 降价拍卖
  - 又称“荷兰式拍卖”
  - 卖方从最高价起步逐渐降价，直到第一个竞拍者接受并支付当前价格

- 思考：视频中的拍卖与这两个哪个较为接近？区别又在哪里？

等价的非实时交互拍卖类型

- 首价密封投标拍卖
  - 竞拍者同时向卖方提交密封报价
  - 卖方同时打开这些报价，出价最高者以其出价购得商品
  - 与降价拍卖是等价的
- 次价密封投标拍卖
  - 竞拍者同时向卖方提交密封报价
  - 出价最高者以第二高出价购得该商品
  - 次价密封投标拍卖也被称为“Vickrey auctions”
    - William Vickrey 1961第一次在学术界定义；可考的17xx年代已经实际采用过
    - Vickrey于1996年赢得了诺贝尔经济学奖
  - 与增价拍卖等价：考虑何时只剩最后一个人；视频中的拍卖呢?
- 我们主要考虑这种等价的“密封投标”拍卖

拍卖的必要性

若已知估值则不需要拍卖

- 设一个卖方卖价值x元商品，多个买方，其中最高出价是y

若卖方知道价格：

- 卖方直接宣布刚好低于y的价格，成交且盈余y－x归于卖方

若买方知道价格：

- 大于但略高于x和以及所有其他买方的出价进行出价
- 思考：为什么要高于其他买方？盈余是?

- 我们的焦点：未知估值
  - （每个）买方拥有独立和私密的估值

- 相关但不同的模型：共同价值
  - 买方不是出于消费目的购买，而是为了转卖盈利
  - 商品有一个共同但未知的公共估值，等于再次出售的收入
  - 买家的出价可能受其他买家影响（看别人出价调整策略）

将拍卖建模成博弈

- 参与人：所有n个竞拍者
- v_i代表参与者i的真实估值，b_i代表i的出价（策略）， b_i是v_i的函数
  - 为了自己的受益，出价可以不等于自己的估值

首价拍卖的收益：
如果b_i不是中标价，那么i的收益为0；否则i的收益为$v_i - b_i$

次价拍卖的收益：
如果b_i不是中标价，那么i的收益为0；否则，设b_j是第二高出价，则i的收益为$v_i - b_j$

次价拍卖

- v_i代表参与者i的真实估值，b_i代表i的出价（策略）， b_i是v_i的函数

次价拍卖的收益：
如果b_i不是中标价，那么i的收益为0；否则，设b_j是第二高出价，则i的收益为$v_i - b_j$

- 广泛使用的拍卖机制

重要性质：truthful，即买家提交真实估值是一个占优策略

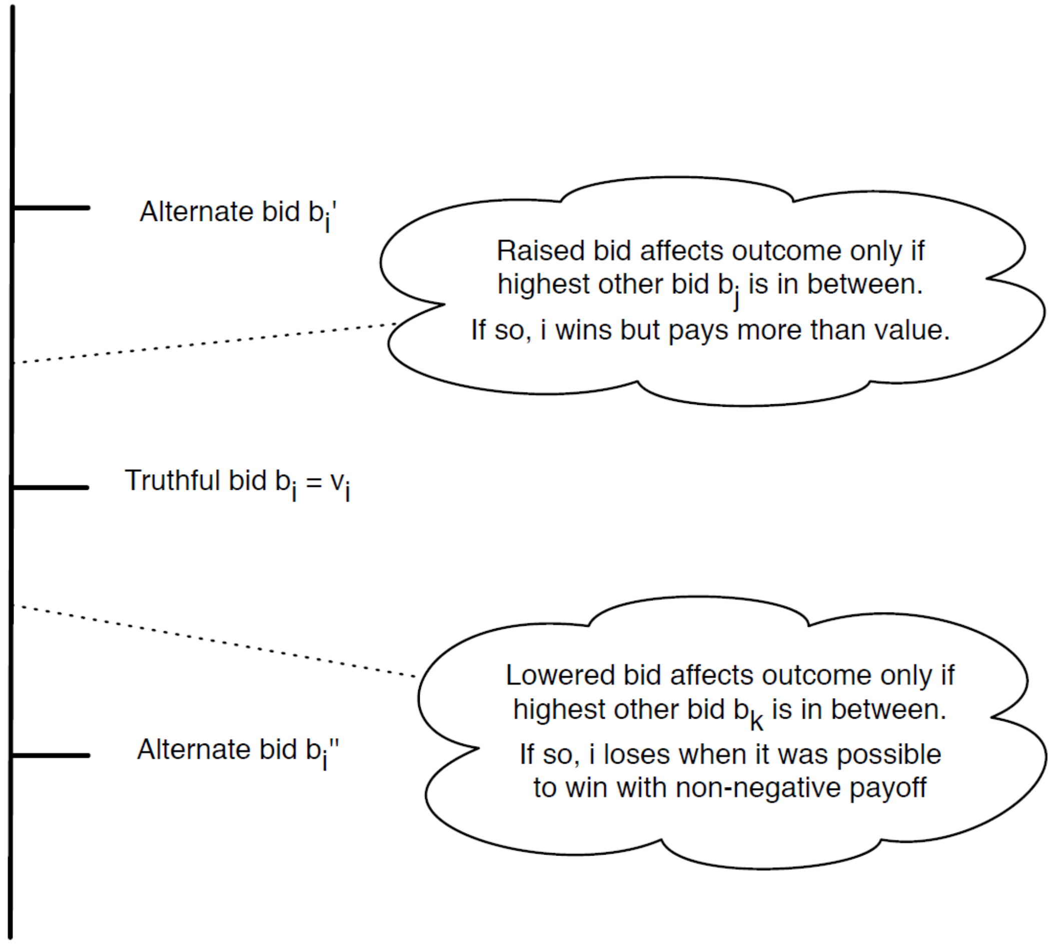
- 与之前博弈框架的微妙差别：参与者不知道其他参与者的出价
  - 但是不论他们出价是什么，依然可以证明truthful是占优策略！

次价拍卖是truthful的

在密封投标次价拍卖中，每个竞拍者i的占优策略是令竞拍价$b_i = v_i$

证明思路：

- 对任何i，truthful bid $b_i = v_i$增加或减少后都不能改进收益
- 增加成$b_i' > v_i$
  - 只需考虑v_i输但b_i'赢
- 减少成$b_i'' < v_i$
  - 只需考虑v_i赢但b_i''输
- 注意，此时假定其他人不动



关注共同价值的拍卖

- 回忆共同价值：商品有对所有人一样但未知的共同价值
- 每个人都只有大体估值，但与真实值差别不大
- 建模：设真实值是v，那么第i个竞拍人的估值 $v_i = v + x_i$
  - x_i是一个期望为0的随机数
- 考虑次价拍卖——现在报价v_i还是占优策略吗？
  - 不是：赢得拍卖的人大概率是估高了
  - 原因：x_i独立采样n次，次大值大概率大于期望
- “赢家的诅咒”

首价拍卖

- v_i代表参与者i的真实估值，b_i代表i的出价（策略）， b_i是v_i的函数

首价拍卖的收益：
如果b_i不是中标价，那么i的收益为0；否则i的收益为$v_i - b_i$

- 首价拍卖策略?
  - 以真实出价不可能是占优策略：以真实出价，即使获胜，$b_i = v_i$所以收益=0
  - 通常稍微降低出价，但是有一个tradeoff：太高了收益少；太低了输掉拍卖
  - 具体策略需要额外信息，常见模型是假定已知别人的出价分布

一种简化模型下的首价拍卖策略

- 有限知识：竞拍者知道互相的估价分布，但是不知道具体估价值
- 简化模型：
  - 每个竞拍者i的估值v_i都是[0, 1]独立均匀分布
  - 每个竞拍者i的出价/策略b_i都由同一个函数s产生，即$b_i := s(v_i)$
  - 函数s严格递增，且总有$s(v) \leq v$（出价总是不大于自己的估值）
  - s函数可以表达很多合理的策略：直接报告v；scale down一个倍数c，等

2个竞拍者

考虑2个竞拍者

对于第i个竞拍者，如果固定他的（随机）估值v_i，则首价拍卖下**期望收益g**满足

$$g(v_i) = v_i(v_i - s(v_i))$$

注意到所有人的期望收益函数g都是一样的

解释：

- i想胜出则另个人出价得比i小，所以概率是v_i（随机性是另个人的）
- $v_i - s(v_i)$是对应的首价收益

我们要找一个"**均衡函数**"s（对应着均衡策略）

- 由于函数s代表着出价策略，我们要找：什么样的函数s是“均衡”的?
- 如果自己尝试换一个函数s’（而另一个人不换），新期望收益是多少?
- 依然固定自己的（随机）估值v_i
  - 因为s, s'都单增并且在[0, 1]上的函数，可考虑某个v满足$s(v) = s'(v_i)$
  - 注意到另一个人还是用s，所以此时另个人出价低于$s'(v')$的概率变成v
- 因此期望收益是

$$v\left(v_i - s'(v_i)\right) = v(v_i - s(v))$$

- 因此s是均衡的可以等价写成：

$$v_i\left(v_i - s(v_i)\right) \geq v\left(v_i - s(v)\right), \qquad \forall v \in [0,1]$$

$$v_i\big(v_i - s(v_i)\big) \ge v\big(v_i - s(v)\big), \qquad \forall v \in [0,1]$$

- 这样的s存在吗？ $s(v) = \frac{v}{2}$
- 怎么解出$s(v) = \frac{v}{2}$的?
- $g(v) = v(v_i - s(v))$，$g(v_i)$取得最大值
  - $g'(v) = v_i - s(v) - s'(v)v$
  - $0 = g'(v_i) = v_i - s(v_i) - s'(v_i)v_i = 0$推出$s'(v_i) = 1 - \frac{s(v_i)}{v_i}$
- 结论：对用同样s、同样分布的两个竞拍人来说，均衡策略是把自己的估值除以2
- 注意：这只是均衡，而不是像次价拍卖那样的占优策略！

一般的n人情况

- n个竞拍人每人估值都[0, l]均匀分布，使用同一个出价函数$s(v_i)$

- 竞拍人i以v_i价格赢得竞拍，那么期望收益是?

$$v_i^{n-1}\big(v_i - s(v_i)\big)$$

- 同样的办法，得到

$$v_i^{n-1}\big(v_i - s(v_i)\big) \geq v^{n-1}\big(v_i - s(v)\big), \qquad \forall v \in [0,1]$$

- 设$G(v) = v^{n-1}(v_i - s(v))$，那么等价于$v_i$是$G(v)$的最大值
- $G'(v) = (n-1)v^{n-2}v_i - (n-1)v^{n-2}s(v) - v^{n-1}s'(v)$
- 代入$G'(v_i) = 0$推出$s'(v) = (n-1)\left(1 - \frac{s(v_i)}{v_i}\right)$
- 解得$s(v_i) = \frac{n-1}{n} \cdot v_i$

- 说明什么？人越多那么出价越需要设置的“保守”一些，否则容易输

一般的分布

- 我们现在要移除[0, 1]均匀分布的限制，而考虑一个一般的分布
  - 依然需要假设独立同分布，并且依然用同样的出价策略s(v)
  - 设分布cdf是F(x)，并假定分布在非负实数上
- 对于竞标者i，如果他的真实估值是v_i并且赢得竞拍，那么
  - 其他所有人出价都需要比$s(v_i)$ 低，所以这个概率是$F(v_i)^{n-1}$
  - i的期望收益是$F(v_i)^{n-1}(v_i - s(v_i))$
- 我们可以类的地得到均衡的条件：

$$F(v_i)^{n-1}\big(v_i - s(v_i)\big) \geq F(v)^{n-1}\big(v_i - s(v)\big), \qquad \forall v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

- $F(v_i)^{n-1}\left(v_i - s(v_i)\right) \geq F(v)^{n-1}\left(v_i - s(v)\right),\ \forall v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- 设$h(v) = F(v)^{n-1}(v_i - s(v))$，那么$h'(v_i) = 0$
- $h'(v) = (n-1)F'(v)F(v)^{n-2}v_i - (n-1)F'(v)F(v)^{n-2}s(v) - s'(v)F(v)^{n-1}$
- $s'(v_i) = (n-1) \cdot \frac{f(v_i)v_i - f(v_i)s(v_i)}{F(v_i)}$

卖家的收益

- 我们都在讨论买家的收益；那么卖家呢?
- 依然考虑简化模型：n个竞拍者的真实估值都在[0, l]均匀独立分布

将n个从[0, l]上均匀独立采样的数从小到大排序，则第k个数的值的期望是$\frac{k}{n+1}$

- 次价拍卖
  - 卖家期望收益为n个随机数的第二大的期望 = $\frac{n-1}{n+1}$
- 首价拍卖
  - 回忆买家策略$s(v_i)=\frac{n-1}{n}v_i$，那么最大出价的期望是$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{n+1}$
- 次价与首价的卖家收益相等!

revenue equivalence

- Book by Paul Klemperer 2004
- 粗略描述：对于一大类拍卖，对竞拍者的任意独立分布，如果竞拍者都采用均衡策略，那么那么卖家期望收益是相等的

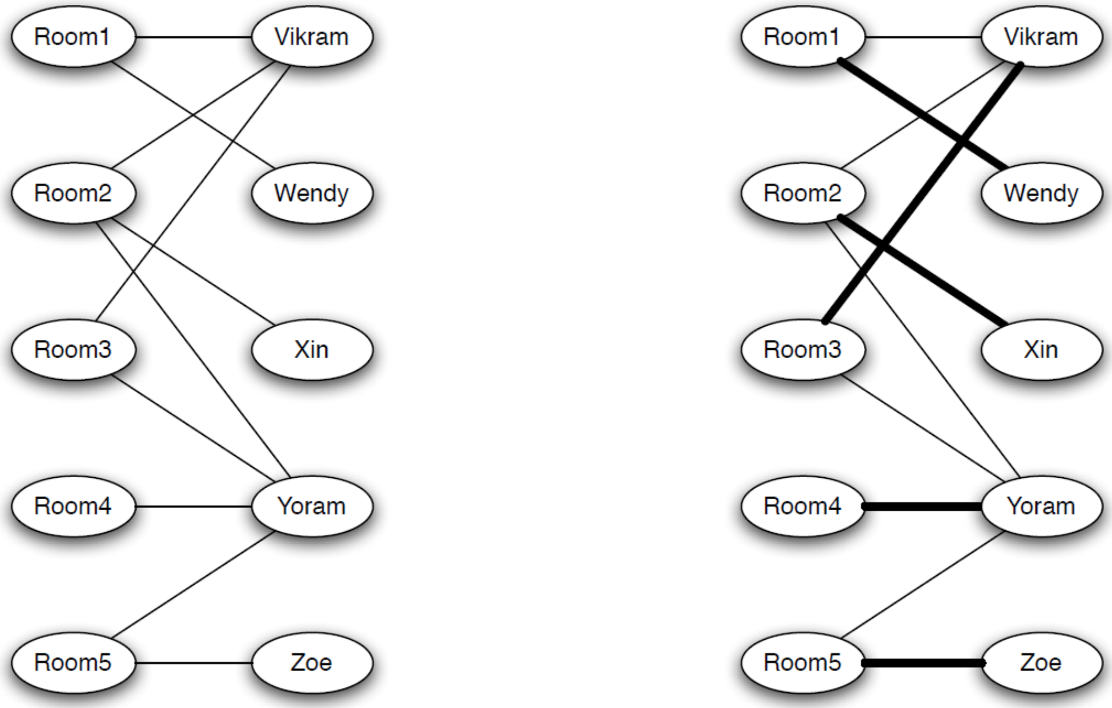
匹配市场

二分图完美匹配

- 二分图：无向图G(V, E)，V可分成不相交的L和R，只有L和R之间的边
- 我们假定：|L| = |R|

匹配：称边子集M为一个匹配，若任何节点在M中至多有一条邻接边

完美匹配：任何点都M中某边连接



(a) *Bipartite Graph*

(b) *A Perfect Matching*

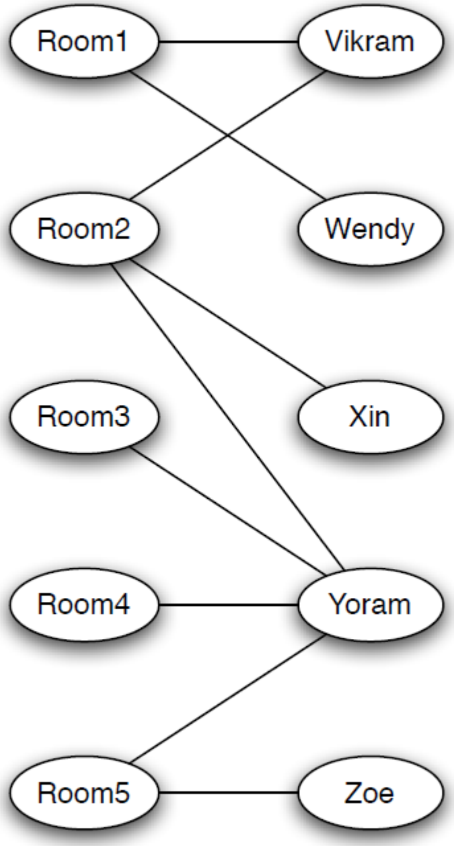
无完美匹配推出存在“受限集”

- 对于一个（子）点集S，设N(S)代表S的邻居节点集
- 称右边点的一个子集S是受限集，若S比N(S)的元素（严格）多

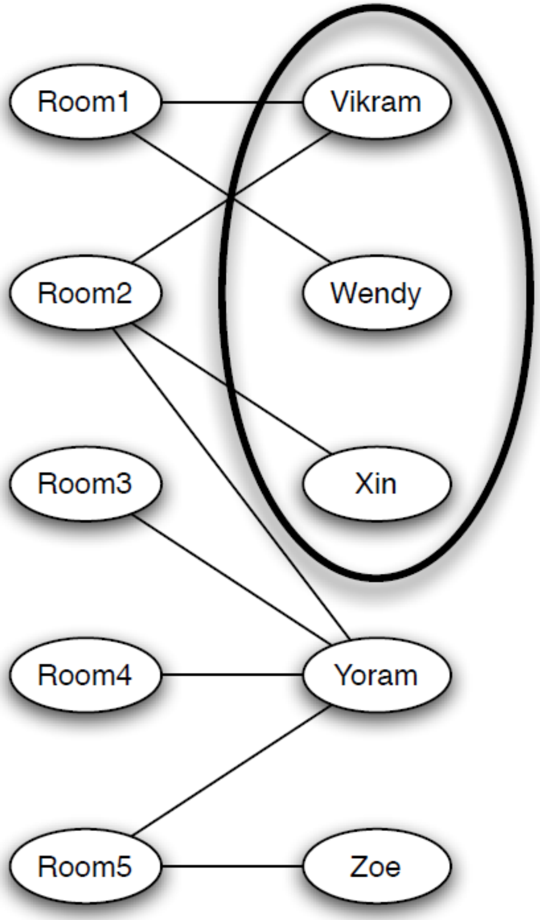
- 显而易见：如果存在受限集，那么一定不存在完美匹配
- 另一个方向也对：

匹配定理 (König 1931; Hall 1935)：
如果一个（左右点数相等的）二分图没有完美匹配，那么必存在受限集

“受限集”



(a) *Bipartite graph with no perfect matching*

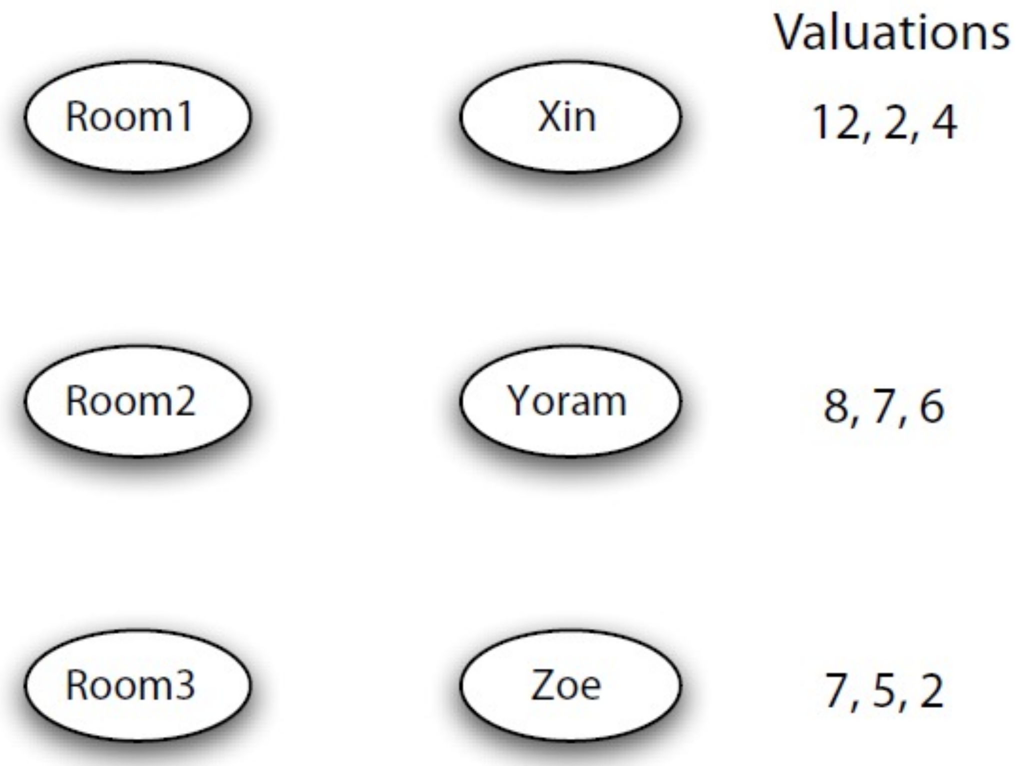


(b) *A constricted set demonstrating there is no perfect matching*

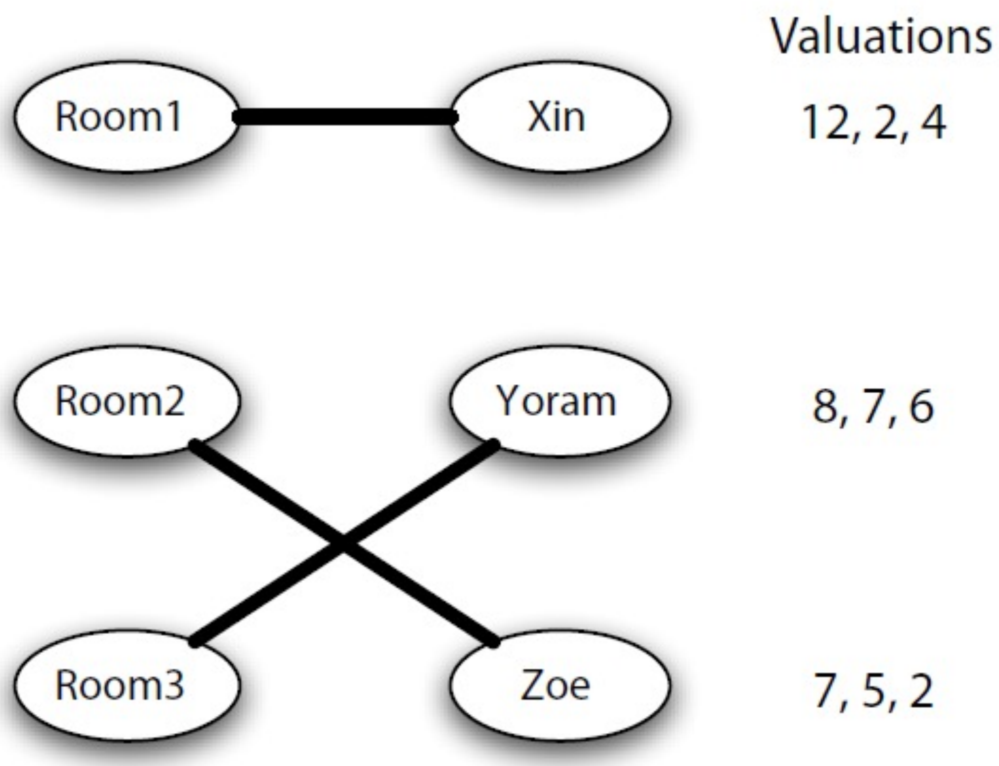
完美匹配与最优匹配

- 完美匹配建模了这种市场：
  - 左边是卖方，每人卖一个商品；右边是买方，买人买一个商品
  - 每个买方对卖方的若干商品展现出兴趣（连边）
  - 最后需要让大家都得到一件感兴趣商品（完美匹配）
- 更一般的市场模型：
  - 每个人不止有偏好/兴趣，还要对此进行量化评分
  - 最优匹配：找一个完美匹配，使所有人的评分和最大

最优匹配



(a) *A set of valuations*



(b) *An optimal assignment*

更“去中心化”的模型：匹配市场

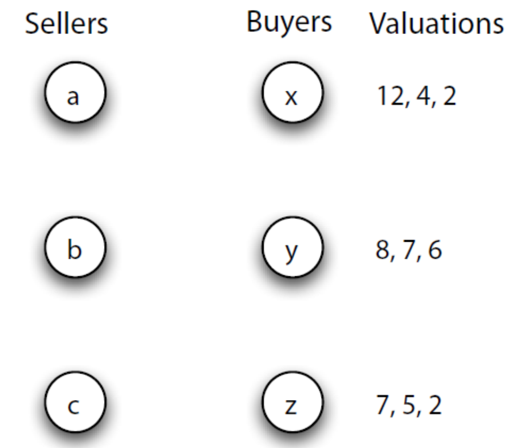
- 之前的市场模型需要全信息以及中心化调度来分配
- 如果没有中心化调度，而是每个买家自主、独立选择卖家呢?

匹配市场

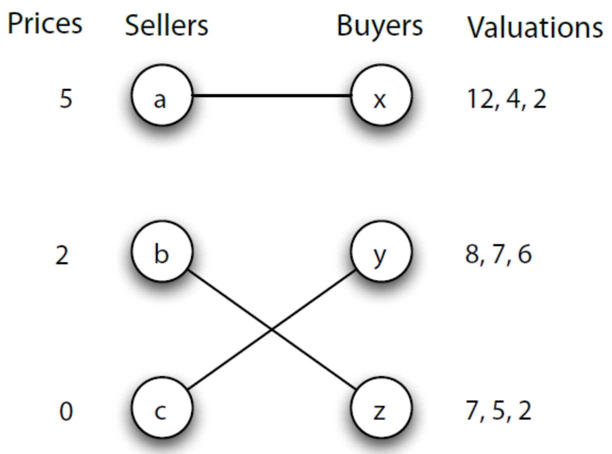
- “匹配市场”模型：
  - 左边卖方右边买方；每个卖方要卖一件商品
  - 卖方i买方j，v_{ij}代表买方j对卖方i的商品的估值（假设是非负整数）
  - 每个卖方i设置一个商品价格p_i
  - 如果买方j从卖方i那里买了商品，那么j的收益是$v_{ij} - p_i$
- 买方目标：独立决策，最大化自己的收益
  - 如果多个选项可以达到最大收益，那么选哪个都可以接受
  - 如果从任何卖家买收益都是负的，那么不会买，并且设置收益为0
  - 称一组卖家为买方j的“偏好卖家”若这些卖家达到了j的最大收益

清仓价格

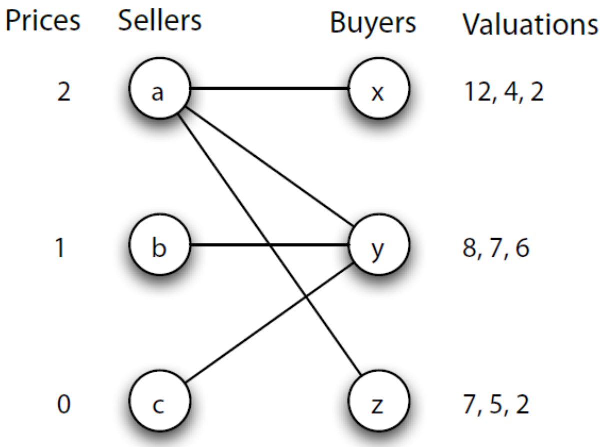
- **偏好卖家图**：对于给定的市场，将每个买家j连到所有j的偏好卖家
- 称一组卖家的标价为清仓价格，若偏好卖家图有完美匹配



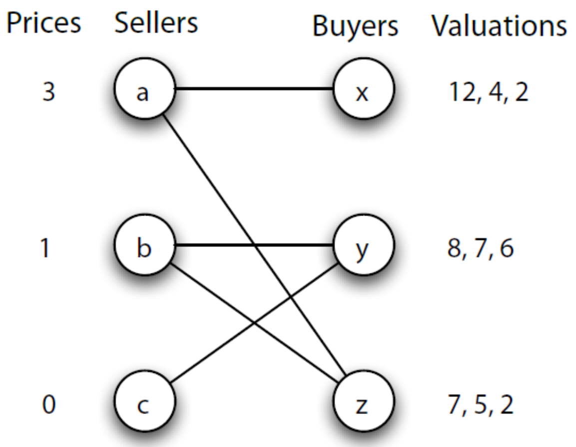
(a) *Buyer Valuations*



(b) *Market-Clearing Prices*



(c) *Prices that Don't Clear the Market*



(d) *Market-Clearing Prices (Tie-Breaking Required)*

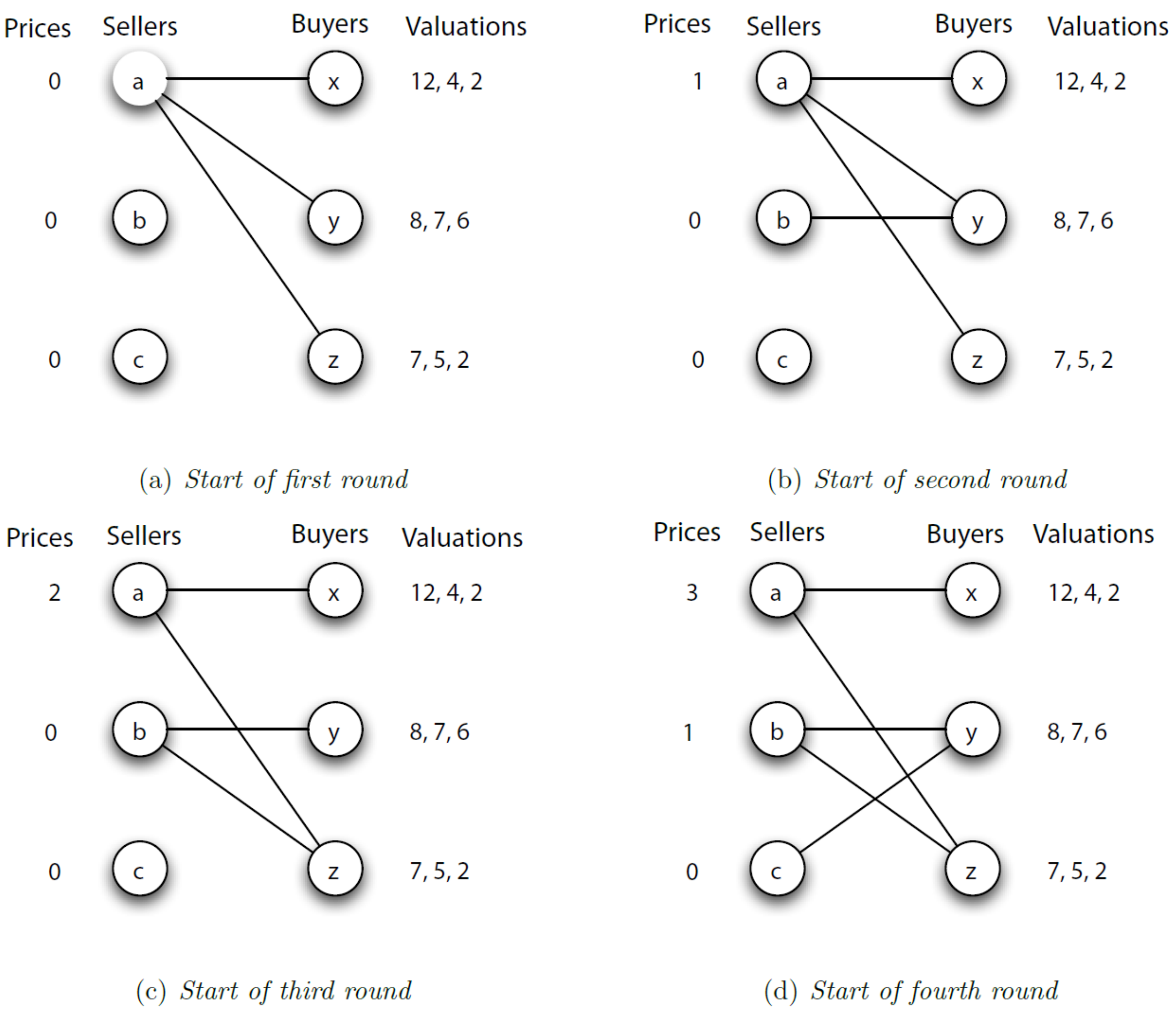
清仓价格的最优性：对任何一组清仓价格，任何偏好卖家图上的完美匹配也是最优匹配，即其估值和不劣于任何买家和卖家配对方式对应的估值和

清仓价格的存在性

定理：对任何买家的估值，总存在一组清仓价格

- Demange, Gale, Sotomayor 1986
- 证明方法：给出了一个算法来构造一组清仓价格
- 算法：
  - 一开始，所有的卖家设置价格$p_i = 0$；若已经清仓那么停止
  - 否则，考虑偏好卖家构成的二分图，一定存在一个“受限集”S（买家的子集）
    - 对应卖家N(S)必然比S点数少，“供不应求”；此时将N(S)的价格同步都加一
  - 上述步骤做完一轮后，要“归零化”，让最小卖家价格 = 0
    - 设p > 0是最小非零卖家价格，将所有的卖家价格减去p
  - 持续运行上述步骤

算法运行示例


Prices
Sellers
Buyers
Valuations
0
a
x
12, 4, 2
0
b
y
8, 7, 6
0
c
z
7, 5, 2
(a) Start of first round
Prices
Sellers
Buyers
Valuations
1
a
x
12, 4, 2
0
b
y
8, 7, 6
0
c
z
7, 5, 2
(b) Start of second round
Prices
Sellers
Buyers
Valuations
2
a
x
12, 4, 2
0
b
y
8, 7, 6
0
c
z
7, 5, 2
(c) Start of third round
Prices
Sellers
Buyers
Valuations
3
a
x
12, 4, 2
1
b
y
8, 7, 6
0
c
z
7, 5, 2
(d) Start of fourth round

证明算法必然结束

- 如果算法结束，那么一定找到了清仓价格；但需证明算法必然结束
- 势能分析：定义势能函数
  - 对于当前的卖方出价，定义买家j的势能$\Delta(j)$为j从卖方那里得到的最大的收益
  - 定义卖方i的势能$\Delta(i)$为他当前的价格p_i
  - 定义整个系统的势能为所有卖方和买方的势能和
- 势能函数的变化
  - 初始$\Delta(i)$都是0，$\Delta(j)$等于买家j（在任意商品中）的最大的估值；初始$\Delta_0 \geq 0$
  - 中间任何一步势能都≥ 0 （为什么？），势能改变仅发生在价格变动时
  - 价格“归零化”：不改变匹配，不改变势能
  - 价格“同时加一”：发生在受限集S的N(S)上，每个S点势能-1，但N(S)势能+1
  - 因为“受限”有 $|N(S)| < |S|$所以总势能降低至少1

匹配市场是单物品拍卖的推广

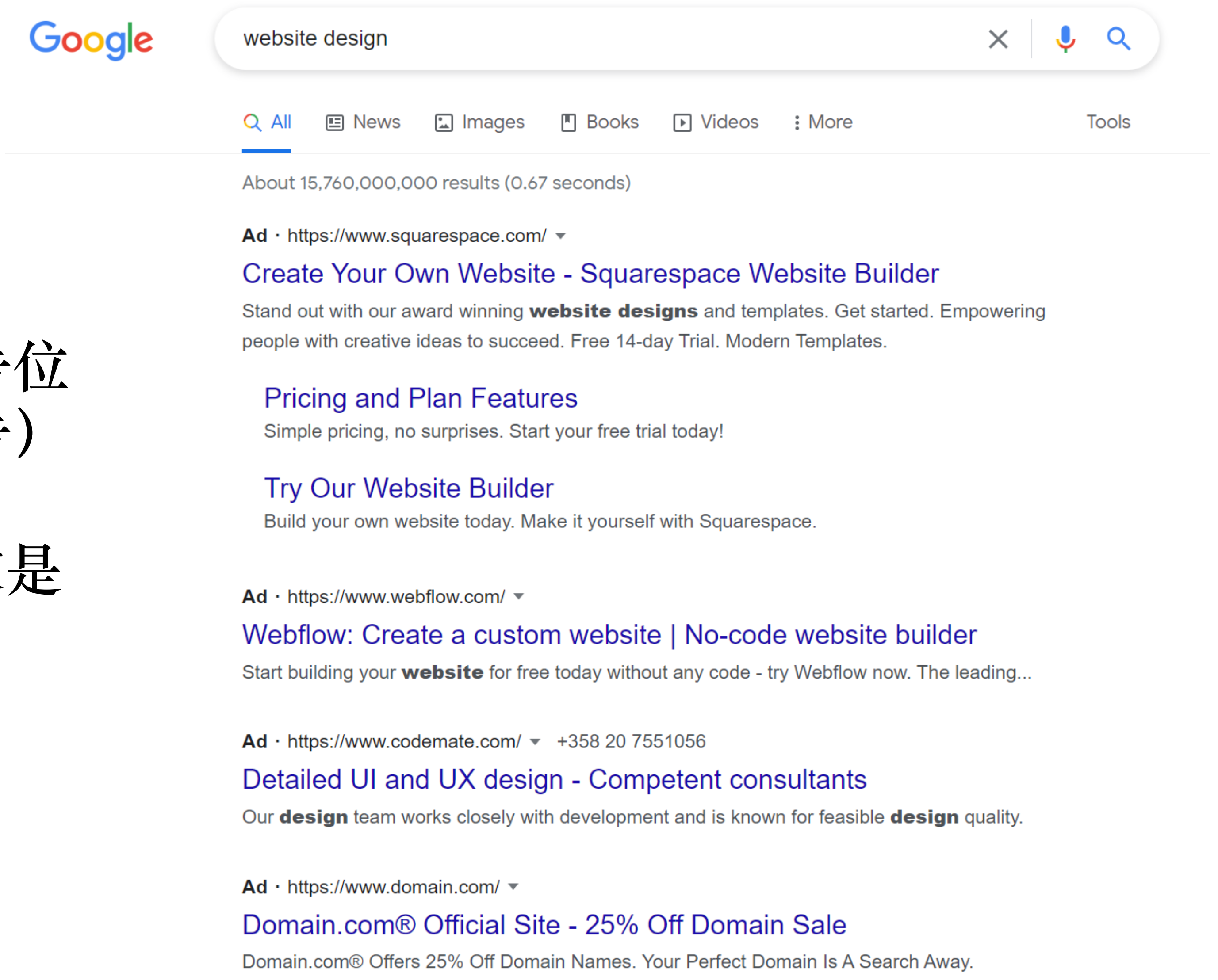
- 若只有一个卖方n个买方
  - 加入n – 1个“假”卖方，并且让买方对假卖方的估值都是0
- 在这个匹配市场里面，给定一个清仓价格组，考虑对应的偏好卖家图的完美匹配，匹配到“真”卖方的就是拍卖的获胜人
- 清仓价格构造算法变为“增价拍卖”
  - 一开始，所有的卖家设置价格$p_i = 0$；若已经清仓那么停止
  - 否则，考虑偏好卖家构成的二分图，一定存在一个“受限集”S（买家的子集）
    - 对应卖家N(S)必然比S点数少，“供不应求”；此时将N(S)的价格同步都加一
  - 上述步骤做完一轮后，要“归零化”，让最小卖家价格 = 0
    - 设p > 0是最小非零卖家价格，将所有的卖家价格减去p
  - 持续运行上述步骤

搜索市场的定价和多物品拍卖的其他重要推广

基本模式：

1. 用户提交搜索
2. 搜索引擎显示结果并在若干广告位上显示广告（每个位置一个广告）

搜索市场：卖家是搜索引擎，买家是广告商，买广告位



搜索广告的商业模式

- 广告商从搜索引擎竞拍广告位
- 通过竞拍确定“点击价格”：用户每次点击广告，广告商都支付该价格的广告费给搜索引擎
- 每个广告位有一个不以广告商、广告内容为转移的“点击率”（公开信息）
  - 描述的是单位时间的点击量，比如说一小时
- 广告商对于每次点击都有一个恒定的“点击收入”
  - 一般而言是每次点击因为获得客源带来的平均收益
  - 与广告位无关
- 广告商的每点击收益：点击收入 - 点击价格

基于匹配市场的定价方案

- 设定：假若搜索引擎预先知道所有广告商的估值
- 建模成匹配市场：
  - 每个卖方对应一个广告位
  - 每个买方j都想买一个广告位i，对i有估价$v_{ij} = r_i v_j$
    - 这里r_i是广告位i的“点击率”，v_j是j的“点击收入”
- 匹配市场的一组清仓价格就是一组合理的广告位定价方案
- 注意：由匹配市场直接给出的定价是对应于单位时间的总“点击价格”
  - 在我们设定中，需要将$\frac{p_i}{r_i}$发布给广告商

搜索引擎不知道广告商估值?

- 搜索产业初期采用首价拍卖
  - 要求广告商（买家）提交自己的“点击收入”作为竞拍报价
  - 搜索引擎按照报价降序安排广告位
- 根据之前分析，首价拍卖中买家出价一定会低于估值（点击收入）
- 但由于搜索市场的拍卖时刻连续发生，所以大家一直在反复试验、观察，会产生巨大不确定性、震荡，浪费资源etc

鼓励大家真实出价

- 次价拍卖可以保证真实出价是占优策略
- 但是次价拍卖如何推广到多商品情形?

VCG定价

- VCG = Vickrey-Clarke-Groves，基于这三位作者的一系列工作
- 大体原则是从下面的角度理解次价拍卖，进而推广

1. 次价拍卖达到了“社会收益”最大化：出价最高的赢得了竞拍
2. 次价拍卖赢家付款的金额等于他对别人的“损害”
   - 设竞拍者按照估价v_i的降序排列
   - 那么竞拍者1赢得了拍卖
   - 如果没有竞拍者1，那么竞拍者2会赢得拍卖，并且能“得到”估值v_2，因此竞拍者1对2产生了v_2的“损害”；但是对于其他竞拍者即使没有1也无法赢得拍卖，所以对他们没有损害。
   - 因此没有1的话，对大家构成的总损害是v_2

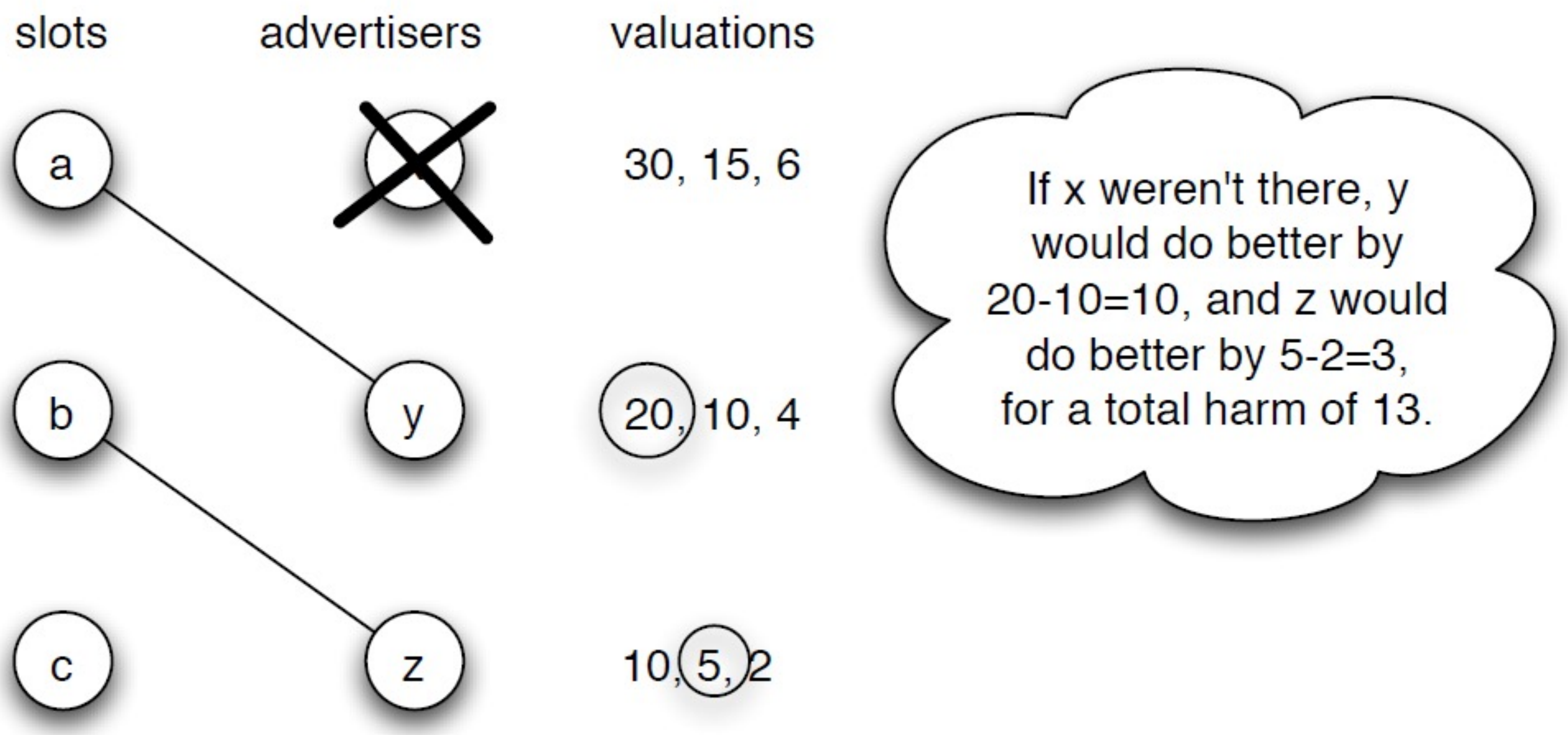
VCG定价

- VCG定价方法是将刚刚对次价拍卖核心思想的理解应用到匹配市场上
- 仍采用匹配市场的模型，但将匹配市场清仓定价改为VCG定价
- 仍假定每个买家只知道自己对每个卖家的估值而不知道别人的

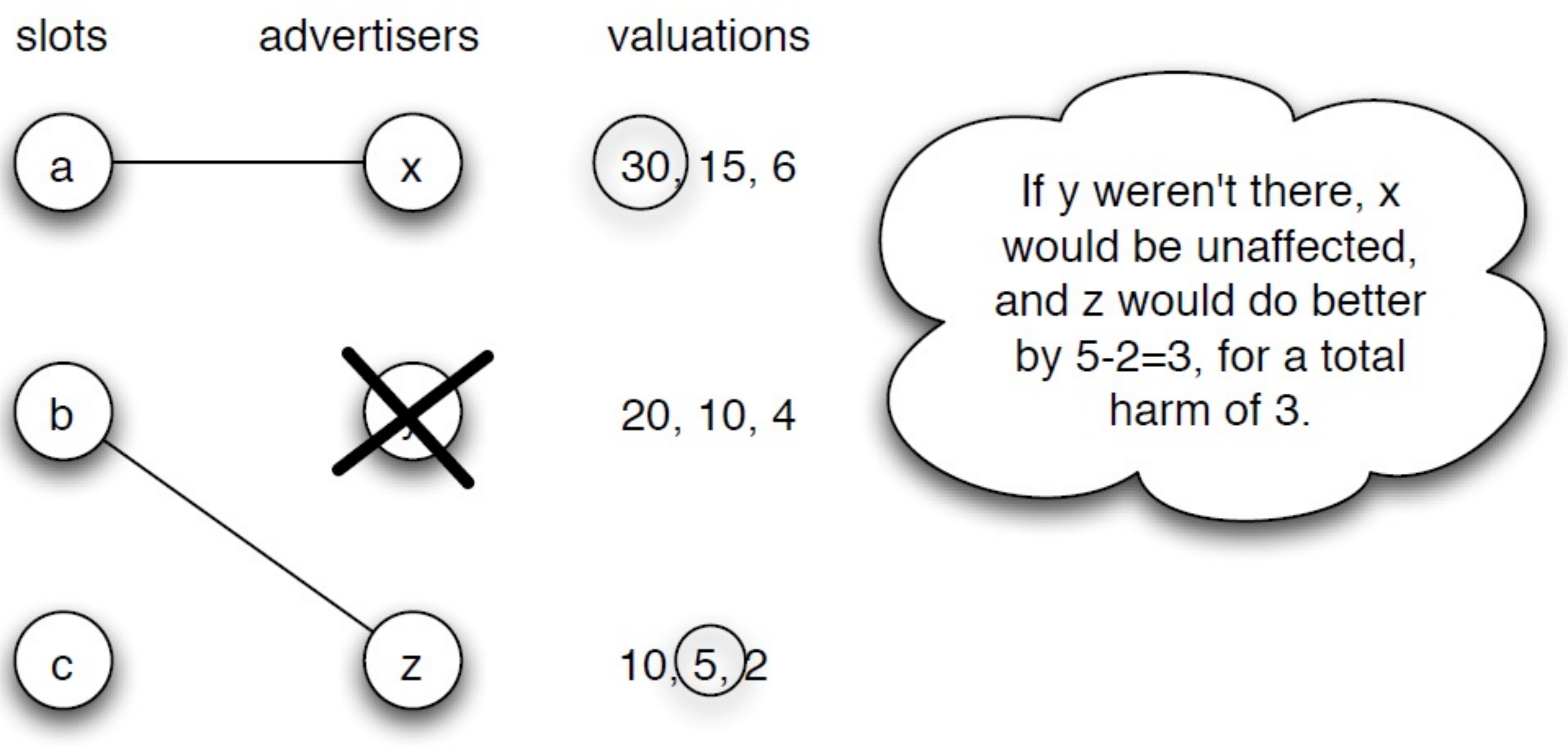
- VCG：

1. 计算“最优匹配”，即使得所有人的估值和最大的完美匹配
2. 定义VCG价格：买家j需要付给卖家i的价格等于他对其他人的“损害”

“损害”的直观理解



(a) *Determining how much better off y and z would be if x were not present*



(b) *Determining how much better off x and z would be if y were not present*

形式化定义“损害”

- 设S是卖家集合，B是买家集合
- V_B^S代表S和B之间最优匹配的值——这也是社会代价最优值
- 令S－i代表S集合去掉卖家i，类似定义B－j
- V_{B-j}^{S-i}代表去掉买家j以及它对应的物品i得到的最优匹配值，也就是在V_B^S上去掉j的值的部分：$V_{B-j}^{S-i} + v_{ij} = V_B^S$
- V_{B-j}^S代表把卖家j去掉后人们能得到的最优匹配值
- 定义“损害”为

$$V_{B-j}^S - V_{B-j}^{S-i}$$

- VCG价格定义为$p_{ij} = V_{B-j}^S - V_{B-j}^{S-i}$

整个VCG定价方法

1. 买家给出自己对所有商品的出价
2. 根据估价计算一个最优二分匹配
3. 对每个买家收取VCG价格，即若买家j得到了卖家i的商品，那么支付 $p_{ij} = V_{B-j}^{S} - V_{B-j}^{S-i}$

- 与清仓价格定价区别：
  - VCG是匹配后的“个性化”定价，而清仓是先“发布”定价再决定匹配

VCG方法是truthful的

定理：在VCG定价下，买家发布真实值是一个占优策略

- 考虑一个买家j在VCG下被分配给了卖家/商品i
- 那么该买家的收益是$v_{ij}-p_{ij}$，回忆$p_{ij}=V_{B-j}^{S}-V_{B-j}^{S-i}$是VCG价格
- 考虑买家j打算在报价上撒谎（即报价不等于估值v）
- 重要观察：如果撒谎没有改变j得到的商品i，那么收益不变！（why）

- 现考虑j撒谎导致了分配给j的商品i改变成了h
- j的收益变为$v_{hj} - p_{hj}$
- 我们需要证：

$$v_{ij} - p_{ij} \geq v_{hj} - p_{hj}$$

- 由于$p_{ij} = V_{B-j}^{S} - V_{B-j}^{S-i}$，代入，则得到等价于证明：

$$v_{ij} + V_{B-j}^{S-i} \geq v_{hj} + V_{B-j}^{S-h}$$

$$v_{ij} + V_{B-j}^{S-i} \geq v_{hj} + V_{B-j}^{S-h}$$

- 根据定义$v_{ij} + V_{B-j}^{S-i} = V_B^S$
- $v_{hj} + V_{B-j}^{S-h}$是某个将j分配给h的完美匹配的权重，不会高于最优二分匹配的权重V_B^S
- 证毕

关于VCG的一些remark

- VCG是一般的对于次价拍卖的推广，不依赖于搜索市场的特殊性质

- 回到搜索市场：
  - VCG鼓励真实出价，广告商的社会收益也最大化了（采用最优匹配）
  - 然而搜索引擎的收益呢?

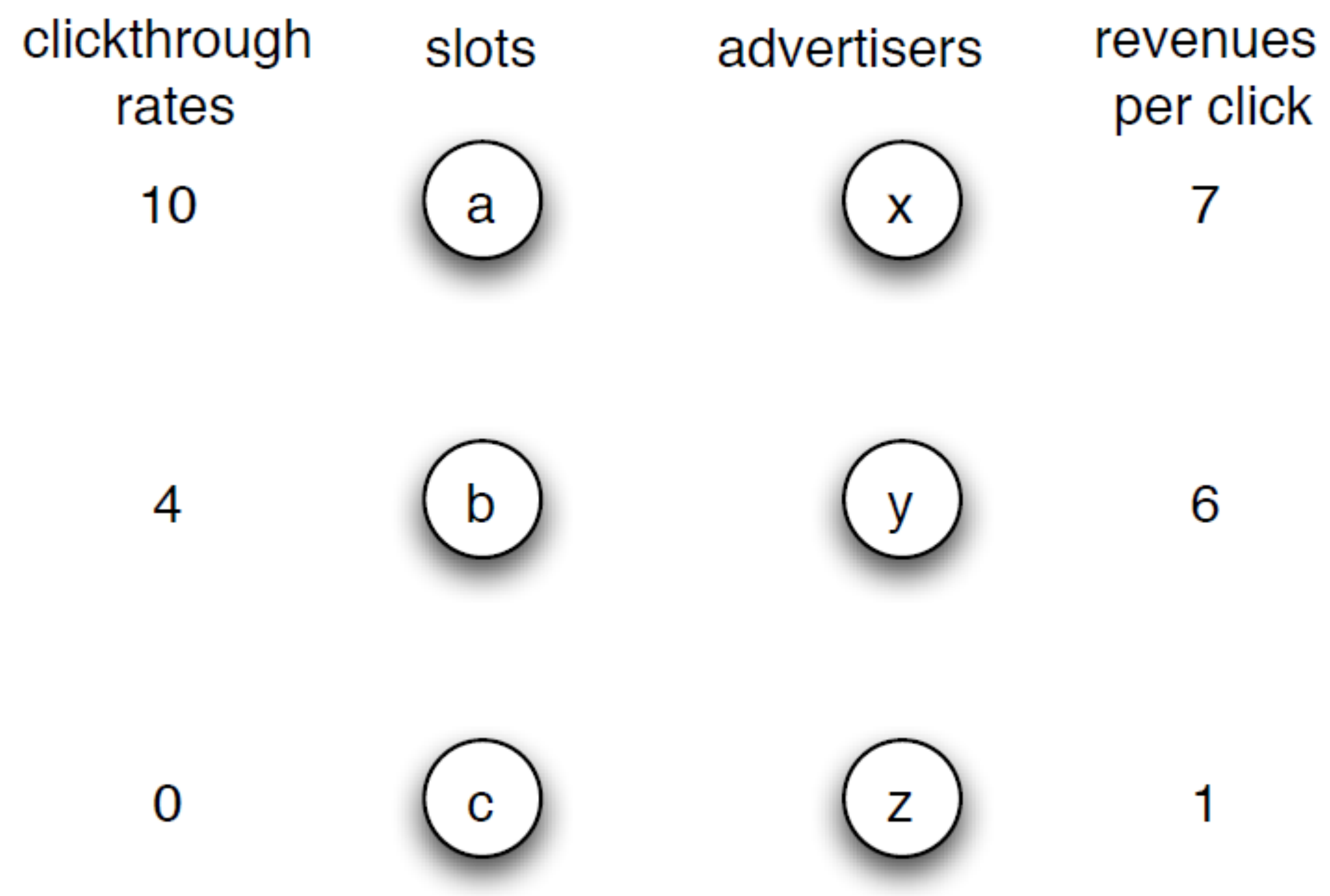
GSP拍卖

- GSP = Generalized Second Price
- GSP是一种实际中采用比较多的广告位拍卖算法
- GSP也是推广次价拍卖，但是行为更加复杂

1. 每个广告商j（买家）发布一个出价 b_j ，代表愿意支付的每点击价格，该出价未必反映真实估价
2. GSP将第i个广告位给出价第i大的人，并收取出价第(i + 1)高的人的出价的每点击价格

- 出价b_j与VCG中要求的v_{ij}不同
- 单价商品情况下与VCG/次价拍卖都等价，但是多件就未必

GSP：truthful策略不是均衡的



假定其他人诚实出价

若x诚实出价
- 得到a，收益10

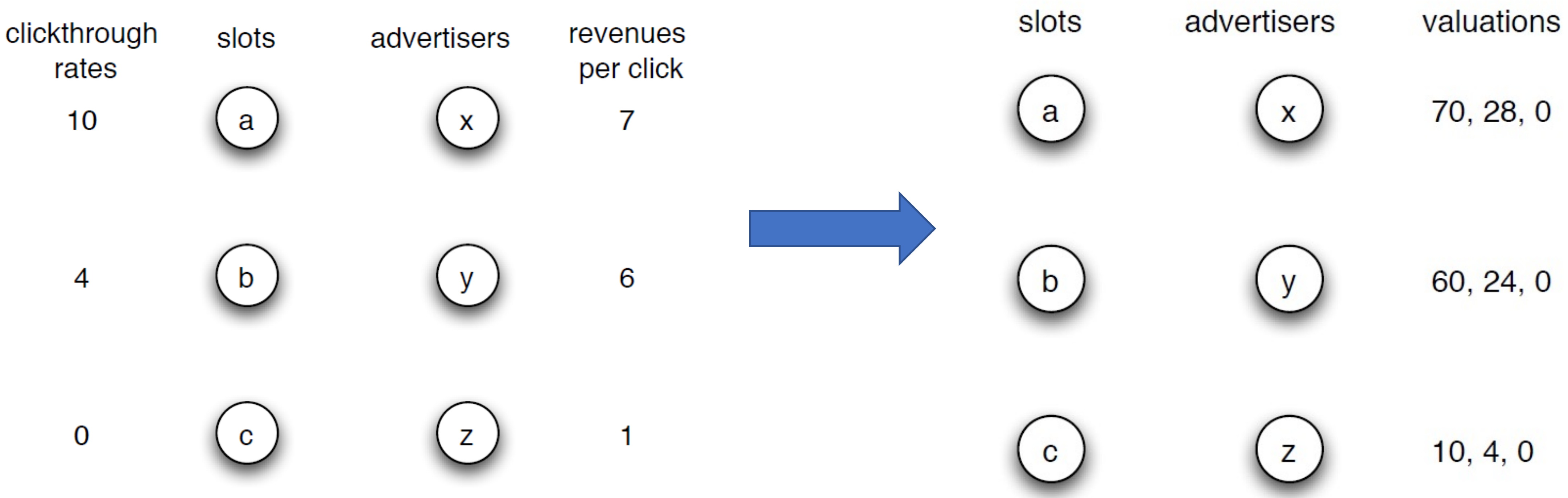
但若x出价改成4
- 得到b，收益24

GSP其他复杂行为

- 可以存在多个纳什均衡
- 可以存在非社会最优的均衡
- 搜索引擎收益也未必好于VCG，取决于采取哪种均衡

GSP的结构：存在社会最优的均衡

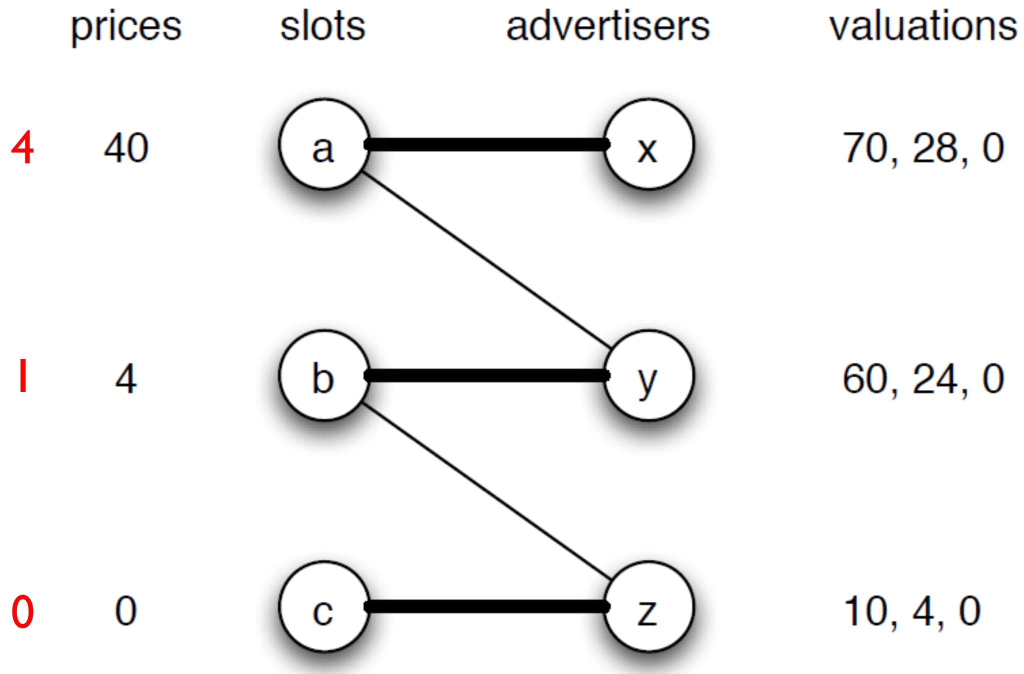
- 依然考虑匹配市场，并计算清仓价格，利用清仓价格推出需要的出价
- 构造匹配市场：估价设为单位时间总收入

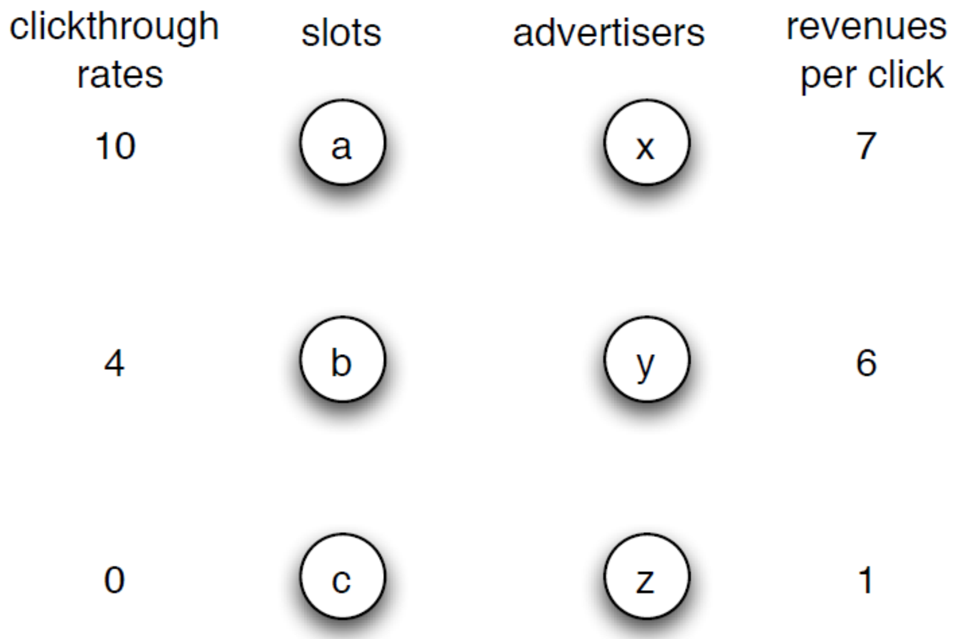


• 计算清仓价格和匹配


slots
advertisers
valuations
a
x
70, 28, 0
b
y
60, 24, 0
c
z
10, 4, 0
prices
slots
advertisers
valuations
40
a
x
70, 28, 0
4
b
y
60, 24, 0
0
c
z
10, 4, 0

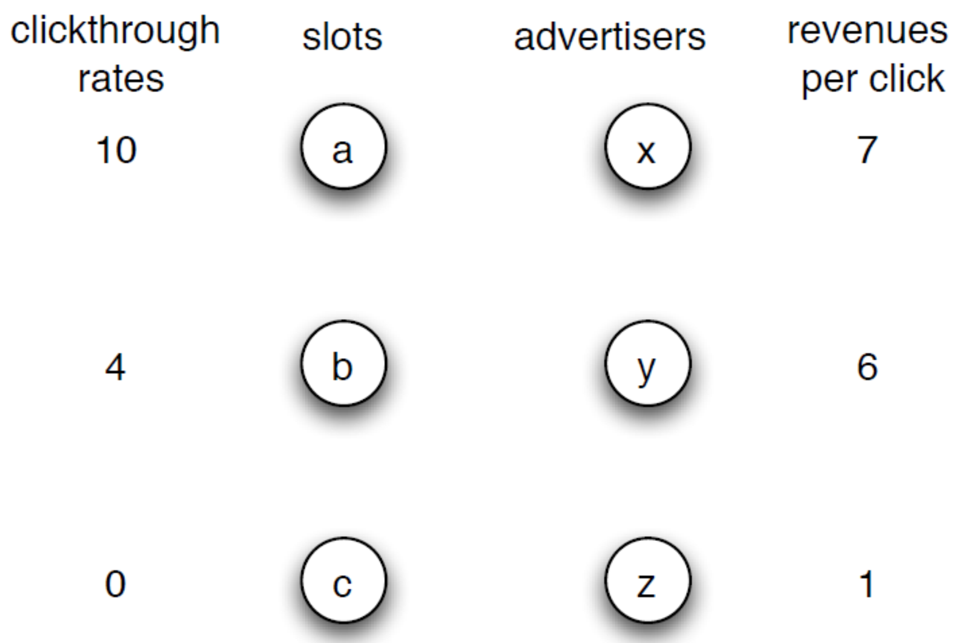
- 将清仓价格转化回每点击收益：40 / 10 = 4， 4 / 4 = 1， 0
- 让清仓价格成为实际GSP支付价格：x出价 > 4，y出价4，z出价1
- 可以验证：对应的匹配市场上的匹配代价就是收益；社会最优+均衡





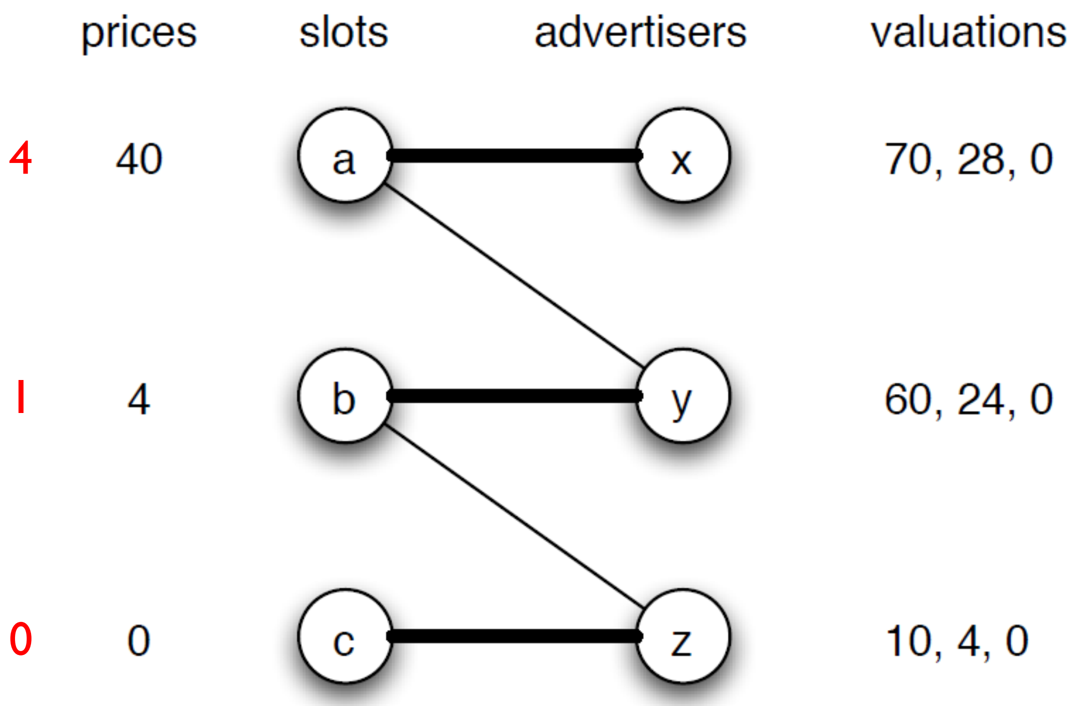
一般的证明

- 排序：广告位按照**点击率**递减排列，广告商按照**点击收益**递减排列



构造匹配市场

- 广告商j对广告位i的估值$v_{ij} = v_j r_i$，即点击收益乘以广告位点击率
- 求得一组清仓价格，设为$p_1, p_2 \ldots$
- 将这组清仓价格转化为（每）点击价格$p_i^* := p_i / r_i$

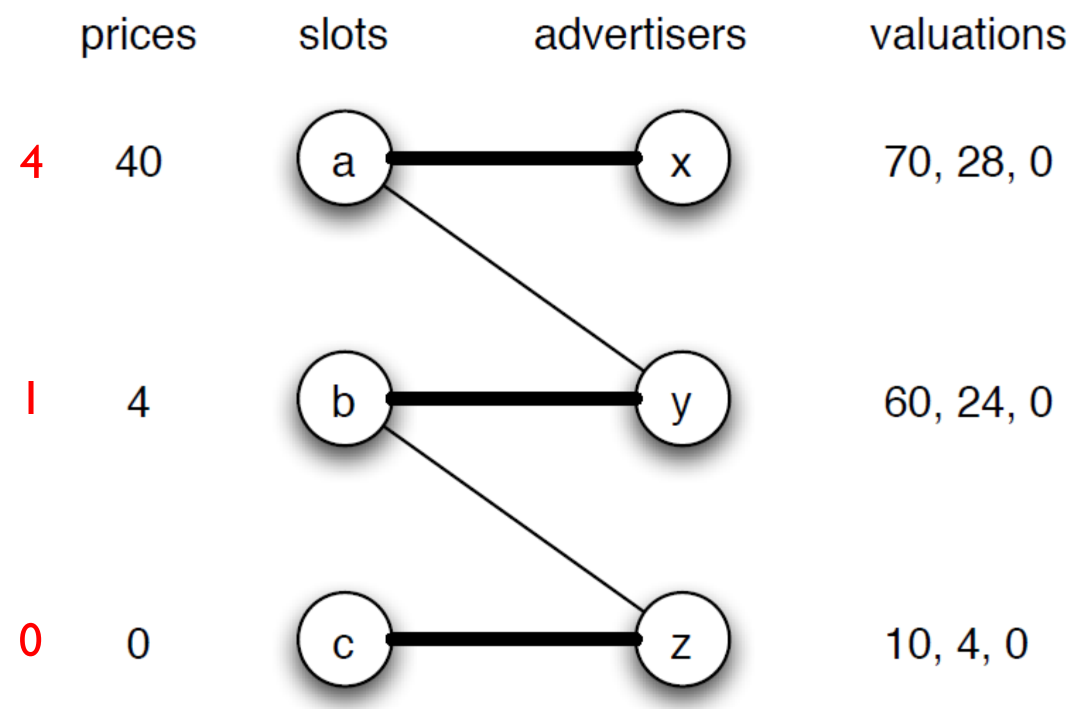


证明：$p_1^* \geq p_2^* \geq \cdots$

清仓价格的最优性：对任何一组清仓价格，任何偏好卖家图上的完美匹配也是最优匹配，即其估值和不劣于任何买家和卖家配对方式对应的估值和

重要性质：最优匹配中广告商k被匹配到第k广告位

- 考虑广告位j < k
- 则$v_{kk} - p_k \geq v_{jk} - p_j$
  - $v_{kk} - p_k = r_k(v_k - p_k^*)$
  - $v_{jk} - p_j = r_j(v_k - p_j^*)$
- $v_{kk} - p_k \geq v_{jk} - p_j$推出$p_j^* \geq p_k^*$



构造出价和证明均衡

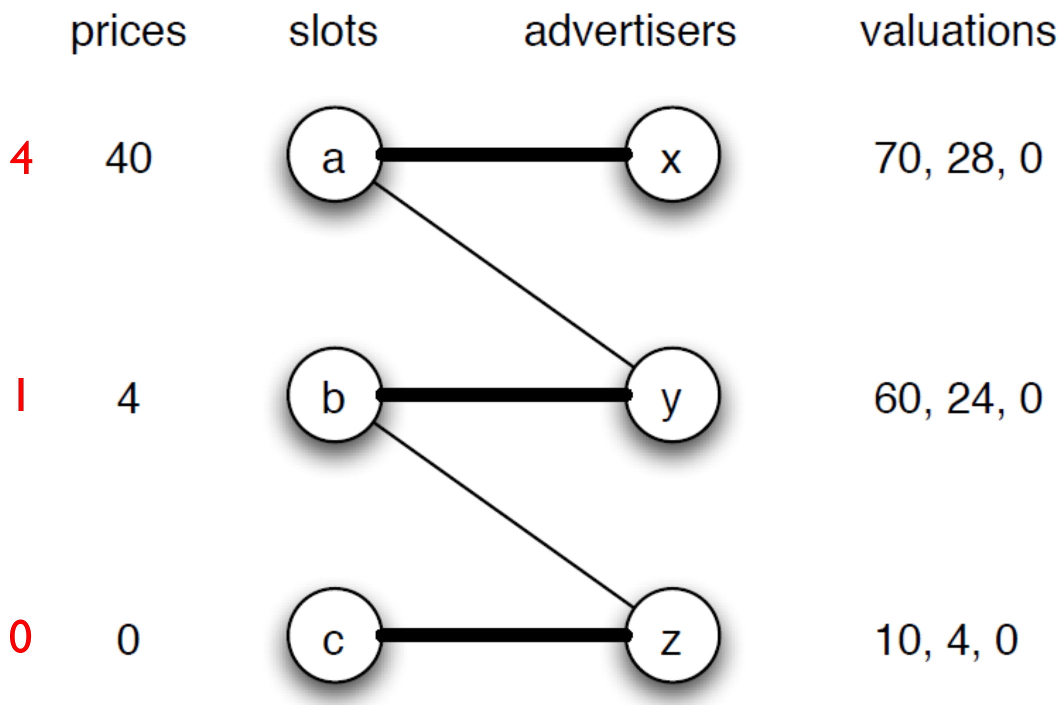
- 对j > 1，广告商j出价p_{j-1}^*；对j = 1，广告商j出$p_1^* + \epsilon$
- 分配和价格：
  - 第j广告商被分配至第j广告位（社会最优）
  - 第j广告商付出p_j^*点击价格
- 证明均衡：无人想降低或提高出价
- 观察：

广告商j在广告位i的收益

= 单位时间收益

$= r_i(v_j - p_i^*) = r_i v_j - p_i$

= 在匹配市场中的收益，而在匹配市场中已经安排到了偏好卖家



考虑广告质量的模型

- GSP有个漏洞：如果有“捣乱”的广告商报“极高”的价格，则会把好广告位卖给这个人，但因为广告内容完全没吸引力，导致用户不会点击

- 解决方案：对于每个广告商j提交的广告，搜索引擎商给出质量系数q_j作为广告质量的评价
  - 具体来说，GSP中广告位i针对j的点击率从r_i更改为$r_i q_j$
  - 如果考虑匹配市场，则相当于把估值改成$v_{ij} = q_j r_i v_j$
  - 然后用这些参数运行已有的算法
  - GSP还可以有另一种改法：不改点击率，但排序的时候按照$q_j b_j$排而不是b_j
    - 相关纳什均衡等性质依然存在